View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk brought to you by CORE
provided by Elsevier - Publisher Connector

JOURNAL OF ALGEBRA 83, 126–157 (1983)

# Modules sans torsion et modules injectifs sur les algèbres de Lie résolubles

M. P. MALLIAVIN

*Institute Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris, France*

*Communicated J. Dieudonné*

Received June 25, 1982

Soit $A = U(\mathfrak{G})$ l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble $\mathfrak{G}$ de dimension finie sur un corps $k$ de caractéristique 0. Nous donnons des caractérisations pour qu'un module à gauche $M$ de type fini sur $A$ soit sans-torsion, respectivement réflexif. Nous obtenons en particulier au Section 3 un théorème de Bourbaki pour les modules sans torsion, lorsque $k$ est algébriquement clos et $\mathfrak{G}$ est algébrique. Un tel résultat a été démontré par des méthodes entièrement différentes par M. Chamarie. Notre démonstration consiste à adapter la version commutative de ce résultat. Stafford vient de démontrer ce résultat en toute généralité. Le paragraphe 4 consiste de l'étude d'invariants analogues au $\mu_i$ de Bass, en algèbre commutative noethérienne. On obtient ainsi une description de la résolution injective minimale du $A$-module à gauche $A$ et il résulte de cette étude que $A$ se comporte comme un anneau de Gorenstein de l'algèbre commutative noethérienne. Le paragraphe 5 décrit, sous certaines hypothèses, des formules de dualité entre Tor et Ext.

## 1. MODULES SANS TORSION ET MODULES TORSION-LESS

Soit $A$ un anneau intègre. Un $A$-module $M$ est *sans torsion* si lorsque $ax = 0$, $a \in A$, $x \in M$ alors $a$ ou $x$ est nul. Un $A$-module $M$ est dit *pré-réflexif* si l'application naturelle $M \to M^{**}$, où $(-)^* = \mathrm{Hom}_A(-, A)$, est injective. On commencera par démontrer le résultat suivant:

THÉORÈME 1.1. *Si $U(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{G}$ algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur un corps $k$, de caractéristique 0, et si $M$ est un $A$-module de type fini alors $M$ est sans-torsion si et seulement si $M$ est pré-réflexif.*

*Preuve.* Pour démontrer que "$M$ pré-réflexif" entraîne "$M$ sans torsion," il suffit de supposer que $A$ est intègre et noethérien à droite et à gauche et le résultat est certainement connu; supposons que : $M \subset M^{**}$; si $am = 0$ $a \in A$, $a \neq 0$ et $m \in M$ alors $m \in M^{**}$. Puisque $M^{**}$ est réflexif, il suffit de démontrer l'assertion pour $M$ réflexif. En effet comme $A$ possède un corps



0021-8693/83 $3.00
Copyright © 1983 by Academic Press, Inc.
All rights of reproduction in any form reserved.

des fractions et que $M^*$ est de type fini sur $A$, alors $M^* \subset (M^*)^{**}$ d'où $(M^{**})^{**} \subseteq M^{**}$ et, puisque $M^{**}$ est un dual, on a l'inclusion inverse. Pour prouver que $M^{**}$ est sans torsion, il suffit de prouver que tout dual est sans torsion et ceci résulte de l'intégrité de $A$: si $N$ est un $A$-module et si $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(N, A)$, $a \in A$, $\varphi a = 0$, alors $a\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in N$, donc $a = 0$ ou bien $\varphi = 0$.

Pour démontrer la réciproque nous supposerons d'abord que $k$ est algébriquement clos et $\mathfrak{G}$ est algébrique. Soient $M$ un $A$-module de type fini sans torsion et soit $SZ(A)$ le semi-centre de $A$. Alors si $T = SZ$, $T^{-1}M$ est un $T^{-1}A$-module sans torsion. Nous aurons à utiliser les théorèmes suivants dûs respectivement à Mac Connell [15] et à Stafford [22].

THÉORÈME 1.2. *Si $\mathfrak{G}$ est une algèbre de Lie résoluble algébrique sur un corps algébriquement clos, posons $A = U(\mathfrak{G})$ et soient $SZ(A)$ le semicentre de $A$ et $T = SZ$, alors $T^{-1}A$ est de la forme $A'_n \otimes_H A_m$, où $H$ est une extension de type fini du corps $k$ et où $A_m$ désigne la $H$-algèbre de Weyl d'ordre $m$, $A'_n = A'_1 \otimes_H \cdots \otimes_H A'_1$ ($n$ facteurs), $A'_1$ étant l'anneau des fractions de $A_1 = H[x, y]$ à dénominateurs en les puissances de $x$.*

THÉORÈME 1.3. *Si $M$ est un $A_n$-module à gauche de type fini sans torsion alors $M \simeq I \oplus A_n^{(s)}$ où $I$ est un idéal à gauche de $A_n$. Le théorème précédent s'étend sans difficulté à une algèbre de la forme $A_n \otimes A'_m$ soit en reprenant mot à mot la démonstration de Stafford soit en passant par localisation, de $A_{n+m}$, à $A_n \otimes A'_m$.*

Revenons à la démonstration de 1.1. On a donc $T^{-1}M = I \oplus (T^{-1}A)^{(s)}$, où $I$ est un idéal à gauge de $T^{-1}A$. Supposons prouvé que $I$ est pré-réflexif; soient $c$: $M \to M^{**}$ l'application canonique et $N = \ker c$. Alors $T^{-1}N = 0$ et, puisque $N$ est un $T^{-1}A$-module de type fini, il existe $s \in SZ(A)$, $s \neq 0$ tel que $sN = 0$; d'où $N = 0$, puisque $M$ est sans torsion. A présent le résultat provient de la remarque suivante: soit $I$ un idéal à gauche d'un anneau intègre $B$. Soit $c$: $I \to I^{**}$ l'application canonique. Si $c(x) = 0$ alors $\varphi_x(f) = f(x) = 0$ pour tout $f \in I^* = \mathrm{Hom}_B(I, B)$; en particulier pour $f = id_I$, on obtient $x = 0$; donc $I$ est pré-réflexif.

Supposons à présent le corps $k$ algébriquement clos et l'algèbre résoluble $\mathfrak{G}$ non nécessairement algébrique. Si $\mathscr{G}$ désigne une enveloppe algébrique de $\mathfrak{G}$, alors $\mathscr{G}$ est résoluble algébrique et tout chaîne saturée d'espaces vectoriels entre $\mathfrak{G}$ et $\mathscr{G}$ est une suite d'idéaux de $\mathscr{G}$, chacun de codimension 1 dans celui qui le suit. Il suffit donc de démontrer que si $\mathfrak{G}$ est un idéal de $\mathfrak{G}_1$, tel que tout $U(\mathfrak{G}_1)$-module de type fini sans-torsion est pré-réflexif, il en est de même pour $\mathfrak{G}$; $U(\mathfrak{G})$ est une extension de Ore de $U(\mathfrak{G}_1)$; soit $U(\mathfrak{G}_1) = U(\mathfrak{G})[X]_\delta$. Soit $M$ un $U(\mathfrak{G})$-module sans torsion de type fini, alors le $U(\mathfrak{G}_1)$-module $U(\mathfrak{G}_1) \otimes_{U(\mathfrak{G})} M = N$ est de type fini et sans torsion. Soit une relation de la fome $(b_0 + Xb_1 + \cdots + X^s b_s)(m_0 + Xm_1 + \cdots + X^r m_r) = 0$, $b_i \in U(\mathfrak{G})$, $m_i \in M$ avec $b_s$, $m_r$ non nuls; alors le terme du produit de plus haut degré en $X$ est $X^{s+r} b_s m_r = 0$ donc $b_s$ ou $m_r = 0$, ce qui est impossible. Le module $N$ se plonge donc dans $N''$ où $N' = \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{G}_1)}(N, U(\mathfrak{G}_1)) \simeq \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{G})}(M, U(\mathfrak{G})) \otimes U(\mathfrak{G}_1)$ le dernier isomorphisme résultant de ce que $U(\mathfrak{G}_1)$ est libre sur $U(\mathfrak{G})$. D'où: $N \hookrightarrow U(\mathfrak{G}_1) \otimes M^{**} = N''$. Soit $0 \to \ker c \to M \to^c M^{**}$ où $c$ est l'application canonique. On a $U(\mathfrak{G}_1) \otimes \ker c = 0$ d'où par fidèle platitude de $U(\mathfrak{G}_1)$ sur $U(\mathfrak{G})$, $\ker c = 0$. Il ne reste plus qu'à étudier le cas où $k$ n'est pas algébriquement clos et la démonstration est un exercice d'algèbre linéaire.

Supposons $k$ quelconque de caractéristique 0 et soit $\tilde{k}$ une clôture algébrique de $k$. Soit $M$ un $U(\mathfrak{G})$-module de type fini sans torsion et soit $\tilde{M} = \tilde{k} \otimes_k M$ le $\tilde{k} \otimes_k U(\mathfrak{G}) = U(\tilde{\mathfrak{G}})$, $\tilde{\mathfrak{G}} = \tilde{k} \otimes \mathfrak{G}$, le module correspondant. Soit $\tilde{S} = U(\tilde{\mathfrak{G}}) \backslash 0$ et soit $N$ le noyau de l'homomorphisme canonique de $\tilde{M}$ dans $\tilde{S}^{-1}\tilde{M}$. On va montrer que $M \cap N = 0$ où $M$ est identifié au sous-espace $1 \otimes M$ de $\tilde{M}$. Supposons qu'il existe $x$, $x \neq 0$, $x \in M \cap N$. Alors, puisque $x$ appartient à $\ker(\tilde{M} \to \tilde{S}^{-1}\tilde{M})$, il existe $\tilde{a} \in U(\tilde{\mathfrak{G}})$, $\tilde{a} \neq 0$ tel que $\tilde{a}x = 0$. Soit $(\lambda_i)_{i \in I}$ une base de $\tilde{k}$ sur $k$ et $(a_j)_{j \in J}$ une base de $U(\mathfrak{G})$ sur $k$. Alors $(\lambda_i \otimes a_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est une base de $\tilde{k} \otimes U(\mathfrak{G})$ sur $k$; on peut donc écrire

$$\tilde{a} = \mu_1 \lambda_1 \otimes a_1 + \cdots + \mu_r \lambda_r \otimes a_r \qquad \text{avec} \quad \mu_i \in k, \ \mu_i \neq 0$$

et on a:

$$0 = \tilde{a}x = \mu_1 \lambda_1 \otimes a_1 x + \cdots + \mu_r \lambda_r \otimes a_r x.$$

Chaque $a_i x$ est non nul car $M$ est sans torsion. Soit $a_1 x, a_2 x, \ldots, a_s x$ une famille linéairement indépendante sur $k$ et maximale pour cette propriété dans $\{a_1 x, \ldots, a_r x\}$. On a alors:

$$\begin{aligned} a_{s+1} x &= \nu_1^{(s+1)} a_1 x + \cdots + \nu_s^{(s+1)} a_s x \\ &\vdots \\ a_r x &= \nu_1^{(r)} a_1 x + \cdots + \nu_s^{(r)} a_s x \qquad \text{où les } \nu_i^{(j)} \in k. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_1 \lambda_1 \otimes a_1 x + \cdots + \mu_s \lambda_s \otimes a_s x \\ &\quad + \mu_{s+1} \lambda_{s+1} \otimes (\nu_1^{(s+1)} a_1 x + \cdots + \nu_s^{(s+1)} a_s x) \\ &\quad + \cdots + \mu_r \lambda_r \otimes (\nu_1^{(r)} a_1 x + \cdots + \nu_s^{(r)} a_s x) \\ &= (\mu_1 \lambda_1 + \mu_{s+1} \lambda_{s+1} \nu_1^{(s+1)} + \cdots + \mu_r \lambda_r \nu_1^{(r)}) \otimes a_1 x \\ &\quad + \cdots + (\mu_s \lambda_s + \mu_{s+1} \lambda_{s+1} \nu_s^{(s+1)} + \cdots + \mu_r \lambda_r \nu_s^{(r)}) \otimes a_s x. \end{aligned}$$

La famille $\{1 \otimes a_i x\}$, $i = 1,\dots, r$ est linéairement indépendante dans $\tilde{M} = \tilde{k} \otimes M$. Donc

$$\begin{gathered}\mu_1 \lambda_1 + \mu_{s+1} v_1^{(s+1)} \lambda_{s+1} + \cdots + \mu_r v_1^{(r)} \lambda_r = 0 \\ \vdots \\ \mu_s \lambda_s + \mu_{s+1} v_s^{(s+1)} \lambda_{s+1} + \cdots + \mu_r v_s^{(r)} \lambda_r = 0.\end{gathered}$$

Comme les $\lambda_i$ sont linéairement indépendants sur $k$ on a: $\mu_1 = \cdots = \mu_s = 0$ ce qui contredit l'hypothèse faite sur les $\mu_i$. Alors $M$ s'injecte dans $\tilde{M}/N$, identifié à un facteur du $\tilde{k}$-espace vectoriel $\tilde{M}$. Comme $\tilde{k}$ et $M$ engendrent $\tilde{M}$, on a nécessairement $N = (0)$ et $\tilde{M}$ est sans torsion sur $U(\tilde{\mathfrak{G}})$. Par suite on a $\tilde{M} \subseteq \tilde{M}^{**}$ où $(-)^* = \mathrm{Hom}_{U(\tilde{\mathfrak{G}})}(-, U(\tilde{\mathfrak{G}}))$, i.e., $\tilde{k} \otimes M^{**} \simeq k \otimes M$. L'application canonique $c$ de $M$ dans son bidual $M^{**}$ se prolonge en l'injection $\tilde{k} \otimes c$ de $\tilde{M}$ dans $\tilde{M}^{**}$. Il en résulte que $\ker c = (0)$ donc $M$ est sans torsion.

Le théorème 1.1 s'étend à toute algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ telle que l'enveloppe algébrique de l'extension de $\mathfrak{G}$ à une clôture algébrique de $k$ satisfait la conjecture de Gelfand–Kirillov. En particulier, 1.1 est valable pour $U(sl_n(\mathbb{C}))$ [11]; 1.1 est aussi valable pour certains anneaux quotients d'algèbres enveloppantes qui satisfont la conjecture généralisée de Gelfand–Kirillov.

## 2. Modules réflexifs sur l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble

Soit $A = U(\mathfrak{G})$ l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ sur un corps $k$ algébriquement clos. Si $P$ est un idéal premier (donc complètement premier (cf. [10]) de hauteur 1 de $A$, alors $P = uA = Au$ où $u$ appartient au semi-centre de $A$, noté $SZ(\mathfrak{G})$ (cf. [19]). Puisque $SZ(\mathfrak{G})$ est un anneau commutatif factoriel ([19]), on a $A = \bigcap_{P \in P(A)} A_P \cap (SZ)^{-1} A$ où $P(A)$ désigne l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 et, en raison de la forme de $P$, $P$ est localisable au sens classique (cf. [1]). On note $SZ$ l'ensemble des semi-invariants non nuls.

Brown, Harjanaris, et MacEacharn ont aussi démontré une telle égalité [5] pour certains anneaux de dimension homologique globale finie.

Théorème 2.1. *Soit $M$ un $A$-module à gauche de type fini sans torsion. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*:

(a) *$M$ est réflexif.*

(b) *On a $M = \bigcap_{P \in P(A)} M_P \cap (SZ)^{-1} M$ et $(SZ)^{-1} M$ est un $(SZ)^{-1} A$-module réflexif.*

(c) $\mathrm{Ass}(V/M) \subseteq P(A) \cup \{0\}$, *où $V = K \otimes_A M = S^{-1} M$, $S = A \backslash (0)$, $K$ est le corps des fractions de $A$, et $(SZ)^{-1} M$ est $(SZ)^{-1} A$-réflexif.*

La démonstration est calquée sur les cas commutatif [4]. On identifie $V$ à $\mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_K(V, K), K)$ au moyen de l'application naturelle $c_t$ : $x \to \{\varphi \mapsto \varphi(x)\}$ et le $A$-module à droite $M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$ s'identifie à l'ensemble $\{x^* \in \mathrm{Hom}_K(V, K),\ x^*(x) \in A$ pour tout $x \in M\}$. D'autre part si $P$ est un idéal premier localisable de $A$ on a: $(M^*)_P \cong (M_P)^*$ (cf. [17]). Le théorème 2.1 résultera des propositions 2.2, 2.4 suivantes; dans lesquelles on conserve les mêmes notations que précédemment.

PROPOSITION 2.2. *On a* $M^* = \bigcap_{P \in P(A)} M_P^* \cap (SZ)^{-1}M^*$ *pour tout* $A$-*module à gauche* $M$ *de type fini.*

*Preuve.* Le module $M^*$ étant sans torsion on a évidement: $M^* \subset M_P^*$ pour tout $P \in P(A)$ et $M^* \subset (SZ)^{-1}M^* = ((SZ)^{-1}M)^*$. D'où l'inclusion $M^* \subseteq \bigcap_{P \in P(A)} M_P^* \cap (SZ)^{-1}M^*$. Soit $x^* \in \bigcap_{P \in P(A)} M_P^* \cap ((SZ)^{-1})M)^*$; alors pout tout $x \in M$, on a $x^*(x) \in \bigcap_{P \in P} A_P \cap (SZ)^{-1}A = A$ car $((SZ)^{-1})M)^* = \{x^* \in \mathrm{Hom}_K(V, K) \mid x^*(x) \in (SZ)^{-1}A$ pour tout $x \in M\}$. D'où $x^* \in M^*$ et l'égalité est démontrée.

COROLLAIRE 2.3. *Si* $M$ *est un* $A$-*module de type fini sans torsion on a*:

$$M^{**} = \bigcap_{P \in P(A)} M_P \cap (SZ)^{-1}M^{**}.$$

*Preuve.* La proposition 1.2 appliquée à $M^*$ prouve que

$$M^{**} = \bigcap_{P \in P(A)} M_P^{**} \cap (SZ)^{-1}M^{**}.$$

L'anneau $A_P$ étant un anneau de valuation discrète est héréditaire à droite et à gauche. Donc $M_P$ est un $A_P$-module libre de type fini. D'où $M_P^{**} \cong M_P$ et le corollaire en résulte.

PROPOSITION 2.4. *Si* $x \in A$, $x \neq 0$, *il n'existe qu'un nombre fini d'idéaux* $P$ *dans* $P(A)$ *qui contiennent* $x$.

*Preuve.* Supposons que $x \in A$ appartiennent à une infinité d'idéaux premiers $P$ de $P(A)$, soit $(P_i)_{i \in I}$; $P_i \cap SZ(A)$ est un idéal premier de hauteur 1 de l'anneau factoriel $SZ(A)$ ([17]); les $P_i \cap SZ(A)$ sont deux à deux distincts car les $P_i$ le sont et sont engendrés par des éléments de $SZ(A)$. Mais dans l'anneau factoriel $SZ(A)$, on a $\bigcap_i (P_i \cap SZ(A)) = 0$ pout toute famille infinie d'idéaux premiers de hauteur 1. Donc $(\bigcap_{i \in I} P_i) \cap SZ(A) = 0$ et, puisque tout idéal bilatère de $A$ rencontre le semi-centre ([10]) on a $\bigcap_{i \in I} P_i = (0)$, ce qui contredit $x \in \bigcap_{i \in I} P_i$.

*Preuve du théorème* 2.1

(a) $\Rightarrow$ (b). Si $M$ est réflexif alors $(SZ)^{-1}M$ est $(SZ)^{-1}A$-réflexif et (b) résulte du corollaire 2.3.

(b) $\Rightarrow$ (a). L'égalité $M = \bigcap_{P\in P(A)} M_P \cap (SZ)^{-1}M^{**} = M^{**}$ résulte du corollaire 2.3.

(b) $\Rightarrow$ (c). On a $M = \bigcap_{P\in P(A)} M_P \cap (SZ)^{-1}M$ et on a noté $V = K \otimes_A M$. On remarque d'abord que $V/M$ s'identifie naturellement à un sous-$A$-module du produit direct $C = \prod_{P\in P(A)} V/M_P \times V/(SZ)^{-1}M$. Pour celà, soit $\varphi$: $V \to C$ l'application qui à $v \in V$ fait correspondre $(v_P, \tilde{v})_{P\in P(A)}$ où $v_P$ est la classe de $v$ modulo $M_P$ et $\tilde{v}$ celle de $v$ modulo $(SZ)^{-1}M$. Il est clair que $M \subset \ker\varphi$; d'autre part si $\varphi(v) = 0$ alors $v \in \bigcap_{P\in P(A)} M_P \cap (SZ)^{-1}M = M$; d'où l'identification. En fait $V/M$, par l'identification précédente, est contenu dans la somme directe:

$$\coprod_{P\in P(A)} V/M_P \times V/(SZ)^{-1}M.$$

En effet si $L$ est un sous-$A$-module libre de $M$ engendré par une base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ de $V$ sur $K$, chacune des coordonnées $x_i$ d'un point $x \in V$ par rapport à la base $e_1, \ldots, e_n$ appartient à $A_P$ sauf pour un nombre fini de $P \in P(A)$, d'après la proposition 2.4. Par suite $x \in L_P \subset M_P$, sauf, au plus, pour un nombre fini de $P \in P(A)$.

La relation $V/M \subset \coprod_{P\in P(A)} V/M_P \times V/(SZ)^{-1}M$ entraîne alors, d'après le lemma intermédiaire 2.5 et son corollaire 2.6, l'inclusion:

$$\mathrm{Ass}_A(V/M) \subset \bigcup_{P\in P(A)} \mathrm{Ass}(V/M_P) \cup \mathrm{Ass}(V/(SZ)^{-1}M).$$

Remarquons d'abord que si un $A$-module $N$ est réunion d'une famille de sous modules $(N_i)_{i\in I}$, on a:

$$\mathrm{Ass}(N) \subseteq \bigcup_{i\in I} \mathrm{Ass}(N_i). \tag{$*$}$$

En effet, si $P$ est un idéal premier associé à $N$ alors, par définition il existe un sous-module $X$, $X \neq 0$, de $N$ tel que $P = \mathrm{Ann}_A(Y)$ pour tout sous-module non nul $Y$ de $X$. D'autre part, puisque $X \neq (0)$, il existe $i_0 \in I$ tel que $X \cap N_{i_0} \neq (0)$. Donc $P \in \mathrm{Ass}(N_{i_0} \cap X) \subseteq \mathrm{Ass}(N_{i_0}) \subseteq \bigcup_{i\in I} \mathrm{Ass}(N_i)$.

LEMME INTERMÉDIAIRE 2.5. *Soit $Q$ un sous-module de $N$. On a*: $\mathrm{Ass}(Q) \subseteq \mathrm{Ass}(N) \subseteq \mathrm{Ass}(Q) \cup \mathrm{Ass}(N/Q)$.

*Preuve.* La première inclusion résulte de la définition de Ass. Si $P \in \mathrm{Ass}(N)$ et si $X \subset N$, $X \neq 0$, est un sous-module de $N$ tel que $P = \mathrm{Ann}(Y)$

pour tout sous-module non nul $Y$ de $N$ alors, dans le cas où $X \cap Q \neq (0)$, $P$ est associé à $Q$; sinon $X \subset N/Q$ et donc $P \in \mathrm{Ass}(N/Q)$.

COROLLAIRE 2.6. *$N = \coprod_{i \in I} N_i$ est un $A$-module somme directe d'une famille de $A$-sous-modules $M_i$, on a*: $\mathrm{Ass}\, N \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathrm{Ass}(N_i)$.

*Preuve.* $\coprod_{i \in I} N_i = \bigcup_J (\coprod_{i \in J} N_i)$ où $J$ parcourt l'ensemble des parties finies de $I$. On a donc, d'après la remarque précédent 2.5 et d'après 2.5:

$$\mathrm{Ass}\, N \subseteq \bigcup_J \mathrm{Ass}\left(\coprod_{i \in J} N_i\right) \subseteq \bigcup_J \bigcup_{i \in J} \mathrm{Ass}\, N_i = \bigcup_I \mathrm{Ass}\, N_i.$$

Terminons la preuve de (b) $\Rightarrow$ (c). Un élément $a \in A \backslash P$, étant inversible dans $A_P$, ne peut annuler un sous-$A_P$-module non nul du $A_P$-module $V/M_P$. Les éléments de $\mathrm{Ass}(V/M_P)$ sont donc contenus dans $P$ et sont $\neq (0)$ puisque $V/M_P$ est un $A_P$-module de torsion et que $K = T^{-1}A_P$, où $T$ est la partie multiplicative $\{1, u, u^2, \ldots\}$, $u$ étant un générateur de $P$ appartenant au semi-centre de $A$. Comme $\mathrm{ht}\, P = 1$, on a nécessairement $\mathrm{Ass}(V/M_P) = \{P\}$ si $V/M_P \neq (0)$ et $\mathrm{Ass}(V/M_P) = \varnothing$ si $V/M_P = (0)$.

Enfin, l'anneau $(SZ)^{-1}A$ étant simple, i.e., sans idéaux bilatères propres, on a, soit $\mathrm{Ass}(V/(SZ)^{-1}M) = \varnothing$, et dans ce cas $V = (SZ)^{-1}M$, soit $\mathrm{Ass}(V/(SZ)^{-1}M) = (0)$.

(c) $\Rightarrow$ (a). Puisque $M \subset M^{**} \subset V$, il résulte du lemme 2.5 la première des inclusions suivantes:

$$\mathrm{Ass}(M^{**}/M) \subset \mathrm{Ass}(V/M) \subset P(A) \cup \{(0)\}.$$

Puisque $A_P$ est héréditaire et $M_P$ est de type fini sans torsion sur $A_P$, il est libre; donc $M_P^{**} = M_P$ pour tout $P \in P(A)$. Par suite $P$ n'appartient pas à $\mathrm{Ass}(M^{**}/M)$. On a donc:

$$\mathrm{Ass}(M^{**}/M) \subset \{(0)\}.$$

Si $\mathrm{Ass}_A(M^{**}/M) = \varnothing$, alors $M = M^{**}$ et (a) est démontré. Supposons que $\mathrm{Ass}_A(M^{**}/M) = (0)$ et posons $U = M^{**}/M$. On a $(SZ)^{-1}U = (0)$ par hypothèse et il existe $X \subset U$, $X \neq 0$, tel que pout tout $Y \subset X$, $Y \neq 0$, on a $\mathrm{Ann}_A\, Y = (0)$. On peut supposer que $X$ est de la forme $Ax$, avec $x \in U$, $x \neq 0$. Comme $(SZ)^{-1}Ax = 0$, on a: $x/1 = 0$ et il existe $s \in SZ$, tel que $sx = 0$. D'où $Asx = 0 = sAx$, car $s$ est un élément normalisant de $A$. Donc $s \in \mathrm{Ann}_A(Ax)$ ce qui contredit le fait que $\mathrm{Ann}_A(Ax)$ est (0).

On utilisera les deux résultats suivants au Section 3.

PROPOSITION 2.7. *Soit $0 \to M \to N \to Q \to 0$ une suite exacte de $A$-*

*modules à gauche. On suppose $N$ de type fini et sans torsion. Si $M$ est réflexif, alors on a*:

$$\mathrm{Ass}_A(Q) \subset P(A) \cup \{0\}.$$

*Preuve.* Posons $V = K \otimes_A M$, $W = K \otimes_A N$, où $K$ désigne le corps des fractions de $A$. D'où les suites exactes de $A$-modules à gauche:

$$0 \to V/M \to W/M \to W/V \to 0,$$

$$0 \to Q \simeq N/M \to W/M \to W/N \to 0.$$

Il résulte du lemme 2.5 que

$$\mathrm{Ass}_A(Q) \subset \mathrm{Ass}_A(W/M) \subset \mathrm{Ass}_A(V/M) \cup \mathrm{Ass}(M/V).$$

Comme $M$ est réflexif on a:

$$\mathrm{Ass}_A(V/M) \subset P(A) \cup \{0\} \qquad \text{d'après le théorème 2.1.}$$

D'autre part il est clair que $\mathrm{Ass}_A(W/V)$ est soit $\varnothing$ soit $(0)$. D'où le résultat. ∎

On pose $M(P) = M_P/PM_P$ et $k(P) = A_P/PA_P = Fr(A/P)$ si $P$ est un idéal premier de hauteur 1 de $A$. Si $n = \dim_K(K \otimes_A M)$ alors $M(P) = k(P) \otimes_A M$ est un $k(P)$-espace vectoriel de dimension $n$, si $M$ est un $A$-module sans torsion.

Si $x \in M$ on note $x(P)$ l'image de $x$ dans $M(P)$. On conserve les notations du théorème 2.1. En particulier, $M$ est sans torsion.

LEMME 2.8. *Soit $x_1, x_2, ..., x_m$ des éléments de $M$ linéairement indépendants sur $K$. Soit $L$ sous-$A$-module de $M$ engendré par les $x_i$. Alors*:

(1) *pour presque tout $P \in P(A)$ les $x_i(P) \in M(P)$ sont linéairement indépendants sur $k(P)$*;

(2) *les $x_i(P)$ sont linéairement indépendants pour tout $P \in P(A)$ si et seulement si* $\mathrm{Ass}(M/L)$ *est contenu dans* $\{0\}$.

*Preuve.* Soit $x_1, x_2, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_n \in M$ une base de $V = K \otimes_A M$ sur $K$ et soit $N = \coprod_{i=1}^n Ax_i$ le sous-$A$-module libre de $M$ engendré par les $x_i$. Puisque $M$ est de type fini sur $A$, il existe $z \in K$, $z \neq 0$, tel que

$$N \subseteq M \subseteq zN.$$

Mais, d'après le proposition 2.4, $z$ est inversible dans $A_P$ pour presque tous les $P \in P(A)$. Donc $N_P = M_P$ pour presque tout $P$ et les $x_1(P), ..., x_n(P)$ forment donc, pour presque tout $P$, une base de $M(P)$ sur $k(P)$.

(2) Supposons $\mathrm{Ass}(M/L) \subseteq \{0\}$; alors on a: $\mathrm{Ass}(M_P/L_P) = (0)$ quel que soit $P \in P(A)$ donc $M_P/L_P$ est libre sur $A_P$ car $A_P$ est un anneau de valuation. Donc $M_P = L_P \coprod E$ où $E$ est un $A_P$-module libre de rang $n - m$ et $M(P) = L(P) \coprod E/PE$, où $E/PE$ est un $k(P)$-espace vectoriel de rang $n - m$. Donc $L(P)$ est de rang $m$. Comme $L(P)$ est engendré par les $x_i(P)$, $i = 1,..., m$, ces derniers sont linéairement indépendants sur $k(P)$.

Inversement, supposons les $x_i(P)$, $i = 1,..., m$, linéairement indépendants sur $k(P)$ pout tout $P \in P(A)$. Alors, en appliquant le lemme de Nakayama, il en résulte que $L_P$ est facteur direct de $M_P$ pout tout $P$. Par suite $M_P/L_P = (M/L)_P$ est sans torsion pout tout $P \in P$. Donc $P(A) \cap \mathrm{Ass}(M/L) = \varnothing$, sinon il existerait $0 \neq N \subset M/L$ et $P \in P(A)$ avec $P = \mathrm{Ann}(T)$ pour tout sous-module non nul $T$ de $N$. Comme $L$ est réflexif, il résulte de la proposition 2.7, que $\mathrm{Ass}(M/L) \subseteq \{0\}$.

## 3. Un théorème de Bourbaki pour les algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie résolubles algébriques

Dans tout ce paragraphe l'algèbre de Lie résoluble $\mathfrak{G}$ est algébrique et le corps $k$ est algébriquement clos.

Théorème 3.1. *Soit $M$ un $A$-module sans torsion de type fini. On suppose que le rang de $M$ est supérieur ou égal à 2. Alors il existe un élément $x \in M$, $x \in 0$, tel que $M/Ax$ soit sans torsion.*

*Preuve.* Soit $y \neq 0$, $y \in M$ un élément tel que $y/1$ engendre un $(SZ)^{-1}A$-module cyclique facteur de $(SZ)^{-1}M$, ceci est possible d'après le théorème de T. Stafford cité au paragraphe 2. D'après le lemme 2.8(1), l'ensemble:

$$Y = \{P \in P(A) \mid y(P) = 0\} \text{ est fini.}$$

Si $Y = \varnothing$, le lemme 2.8(2) appliqué à $\{x_1 = y\}$ entraîne que $\mathrm{Ass}(M/Ay) \subset \{0\}$. Comme $\mathrm{rang}\, M \geqslant 2$, on a $\mathrm{Ass}(M/Ay) \neq \varnothing$. Donc $\mathrm{Ass}(M/Ay) = \{0\}$; il en résulte que $M/Ay$ est sans torsion: en effet $(SZ)^{-1}(M/Ay)$ est sans torsion sur $(SZ)^{-1}A$ d'après le choix de $y$: si $rm = 0$, $r \in A$, $r \neq 0$ et $m \in M/Ay$ alors on aurait $r/1 \cdot m/1 = 0$ dans $(SZ)^{-1}(M/Ay)$; donc $m/1 = 0$ dans $(SZ)^{-1}(M/Ay)$ et il existerait $z \in SZ$ tel que $zm = 0$; mais alors $(z)Am = (0)$ ce qui est impossible si $m \neq 0$ car $\mathrm{Ass}(M/Ay) = \{0\}$.

Si $Y \neq \varnothing$ on va prouver qu'il existe $z \in M$ tel que l'ensemble $\{P \in P(A) \mid z(P) = 0\}$ est strictement contenu dans $Y$. Pour cela, soit $P_0 = As = sA$ dans $Y$. On a $\bigcap_{n \geqslant 0} As^n = 0$. Comme $y \neq 0$, il existe $n$ tel que $y = s^n z$, $z \notin P_0 M$. Il est facile de vérifier que $z$ convient. De proche en proche on obtient ainsi $x \in M$ tel que $M/Ax$ soit sans torsion et on est ramené au cas où $Y$ est vide.

THÉORÈME 3.2. *Soit $M$ un $A$-module sans torsion de type fini où $A = U(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{G}$ étant une algèbre de Lie algébrique résoluble sur un corps $k$ algébriquement clos de caractéristique zéro.*

*Alors il existe un sous-module libre $L$ de $M$ tel que $M/L$ soit isomorphe à un idéal à gauche de $A$.*

*Preuve.* On procède par récurrence sur $n = \text{rang } M$. Si $n \leqslant 1$, $M$ est isomorphe à un idéal à gauche de $A$ et il n'y a rien à démontrer. Soit $n \geqslant 2$. D'après le lemme 2.2 il existe un sous-module libre de rang 1 de $M$, soit $L_0$, tel que $M/L_0$ soit sans torsion. Alors $M/L_0$ est de rang $n-1$ et l'hypothèse de récurrence entraîne l'existence d'un sous module libre $L_1$ de $M/L_0$ tel que $(M/L_0)/L_1$ est isomorphe à un idéal à gauche de $A$. Soit $L_0 \subset L \subset M$ où $L$ est un sous-module de $M$ tel que $L/L_0 \simeq L_1$; alors $L \simeq L_0 \coprod L_1$; donc $L$ est un sous-module libre de $M$ et $M/L$ est isomorphe à un idéal à gauche de $A$.

Le théorème précédent a été démontré par une autre méthode, qui s'applique à des anneaux plus généraux que des algèbres enveloppantes, mais qui ne donne rien de plus pour des algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie résolubles non algébriques, par Chamarie [9]. Récemment Stafford a établi (non publié) un théorème de Bourbaki pour les anneaux de Krull au sens de Chamarie.

## 4. LES $\mu_i$ DE BASS POUR L'ALGÈBRE ENVELOPPANTE D'UNE ALGÈBRE DE LIE RÉSOLUBLE

Soit $A$ une *$k$-algèbre filtrée*, sur un corps $k$ de caractéristique 0, i.e., une algèbre munie d'une filtration croissante et exhaustive par des sous-$k$-espaces vectoriels $\mathscr{F}_\nu$, $\nu \in \mathbb{Z}$, telle que $\mathscr{F}_\nu = (0)$ pour $\nu < 0$ et $\mathscr{F}_0 = k$, $\mathscr{F}_i \mathscr{F}_j \subseteq \mathscr{F}_{i+j}$. On supposera toujours que le gradué associé $\text{Gr}_{\mathscr{F}} A = \coprod_{i \geqslant 0} \mathscr{F}_i / \mathscr{F}_{i-1}$ est un anneau commutatif noethérien. Posons $B = \text{Gr}_{\mathscr{F}}(A)$. Si $\text{Gr}_{\mathscr{F}}(A) = B$ est un anneau de Gorenstein de dimension pure $\omega$, c'est-à-dire que, pout tout idéal maximal $\mathscr{M}$ de $B$ (dont on oublie la graduation) l'anneau local $(\text{Gr}_{\mathscr{F}} A)_{\mathscr{M}}$ est Gorenstein de dimension de Krull $\omega$, alors pour tout $B$-module $N$ de type fini on a:

$$\text{Ext}_B^j(\text{Ext}_B^i(N, B), B) = 0 \qquad \text{si} \quad j < i.$$

Ceci signifie que le grade du $B$-module $\text{Ext}_B^i(N, B)$ est $\geqslant i$ en appelant *grade* d'un $B$-module $T$ l'infimum des $j$ tel que $\text{Ext}_B^j(T, B) \neq 0$.

Cette notion de grade s'étend sans difficulté aux modules à gauche (ou à droite) sur un anneau $A$ non commutatif. Si $A$ est une $k$-algèbre filtrée telle que $\mathrm{Gr}_{\mathscr{F}}(A)$ est un anneau de Gorenstein de pure dimension $\omega$, Levasseur [14] a démontré (généralisant un résulte de [2]) que l'on a:

$$\mathrm{Ext}_A^j(\mathrm{Ext}_A^i(M, A), A) = 0 \qquad \text{si} \quad j < i \text{ et si } M \text{ est un } A\text{-module de type fini.}$$

Rappelons le résultat suivant [20].

PROPOSITION 4.1. *Si $A$ est une $k$-algèbre filtrée dont le gradué associé est un anneau de Gorenstein, alors dans la résolution injective minimale du $A$-module à gauche $A$:*

$$0 \to A \to E_0 \to E_1 \to \cdots$$

*la dimension homologique faible de $E_i$ est inférieure ou égale à $i$.*

On suppose dans toute la suite du paragraphe que $A = U(\mathfrak{G})$ où $\mathfrak{G}$ est une algèbre de Lie résoluble sur un corps $k$ de caractéristique 0. On considère sur $A$ la filtration naturelle déduite du théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt. On sait [14] que l'anneau $A$ est de Cohen–Macaulay au sens que la hauteur de $P(\mathrm{ht}\, P)$ est égale au grade du $A$-module (à gauche ou à droite) $A/P$ noté $\mathrm{gr}(A/P)$. On a aussi la formule [23] $\mathrm{ht}\, P = \text{GK-dim}_k A - \text{GK-dim}_k A/P$ où $\text{GK-dim}_k$ est la dimension de Gelfand–Kirillov. Il résulte aussi de [2] que l'on a pour tout $A$-module de type fini à gauche $M$, $\mathrm{gr}\, M + \text{GK-dim}\, M = \text{GK-dim}\, A$, où $\text{GK-dim}\, M$ est aussi la dimension de Berstein de $M$ et où $\mathrm{gr}\, M$ est noté $j(M)$ dans [2].

Il serait utile d'avoir une réponse à la question suivante: Si $M$ est un $A(=U(\mathfrak{G}))$-module à gauche de type fini et si $I = \mathrm{Ann}_A(M)$ est l'annulateur de $M$, a-t-on $\mathrm{Ext}_A^i(M, A)I = 0$ pour tout $i$, où la structure de module à droite sur $\mathrm{Ext}_A^i(M, A)$ provient de celle de $A$? Il suffirait de pouvoir démontrer que si $I$ est un idéal bilatère de $A$ alors $\mathrm{Ext}_A^i(A/I, A)I = 0$ pour tout $i$, où les $\mathrm{Ext}_A^i(A/I, A)$ sont calculés pour la structure de $A$-modules à gauche de $A/I$ et de $A$. Je ne sais démontrer ce résultat que si $I$ est engendré par une suite régulière centralisante. K. A. Brown, P. Ducloux, T. Levasseur, et C. Moeglin viennent de démontrer que la réponse à cette question est négative en général. Ceci est vrai pour tout idéal premier $P$ de hauteur 1 dans $A$. D'autre part il est facile de voir que si $\mathfrak{G}$ est une algèbre de Lie résoluble pour laquelle $\bar{k} \otimes \mathfrak{G}$, où $\bar{k}$ est une clôture algébrique de $k$, donne une réponse positive à la question alors il en est de même pour $\mathfrak{G}$, car on a $\bar{k} \otimes_k \mathrm{Ext}_A^i(A/I, A) = \mathrm{Ext}_{\bar{A}}^i(\bar{A}/\bar{I}, \bar{A})$ et $1 \otimes I \subseteq \bar{I} = \bar{k} \otimes_k I$. Donc $\mathrm{Ext}_{\bar{A}}^i(\bar{A}/\bar{I}, \bar{A})(1 \otimes I) = 0$ d'où $\bar{k} \otimes_k \mathrm{Ext}_A^i(A/I, A)I = 0$ et $\mathrm{Ext}_A^i(A/I, A)I = 0$. Si $P$ est un idéal premier de $A$ on note $\mu_i(P, A)$ la dimension sur $\mathrm{Fr}(A/P)$ du $\mathrm{Fr}(A/P)$-espace vectoriel $\mathrm{Fr}(A/P) \otimes_{A/P} \mathrm{Ext}_A^i(A/P, A)$ où $\mathrm{Ext}^i$ est calculé pour les $A$-modules à gauche $A/P$ et $A$ et où la structure de $A/P$-module à gauche sur $\mathrm{Ext}_A^i(A/P, A)$ provient de la structure de $A/P$-module à droite sur $A/P$. En algèbre commutative noethérienne les cardinaux sont les $\mu_i$ introduits par Bass (cf. [1]).

On utilisera le résultat suivant (théorème 4.15 Chap. II [2]).

THÉORÈME 4.2. *Soit $P$ un idéal premier de $A$ et soit $M$ le $A$-module à gauche $A/P$. Soit $d$ la hauteur de $P$ et $\omega = \dim \mathfrak{G} = \operatorname{gl}\dim A = \text{GK-dim}\, A$. Alors il existe une filtration de $M$ par des sous-modules $\Gamma_i(M)$:*

$$(0) \subseteq \Gamma_0(M) \subseteq \Gamma_1(M) \subseteq \cdots \subseteq \Gamma_\omega(M) = M$$

*dont les facteurs $M(0),\dots, M(\omega)$ sont les premiers termes des suites exactes courtes:*

$$0 \to M(t) \to \operatorname{Ext}_A^{\omega-t}(\operatorname{Ext}_A^{\omega-t}(M, A), A) \to W_t \to 0$$

*telles que, pour chaque $t$, le $A$-module à gauche $W_t$ est isomorphe à un sous-quotient de la somme directe:*

$$\operatorname{Ext}_A^{\omega-t+2}(\operatorname{Ext}_A^{\omega-t+1}(M, A), A) \amalg \cdots \amalg \operatorname{Ext}_A^{\omega}(\operatorname{Ext}_A^{\omega-1}(M, A), A).$$

COROLLAIRE 4.3. *On a $M(t) = (0)$ pour $t = \omega,\ \omega - 1,\dots, \omega - d + 1$ et $M = \Gamma_{\omega-d}(M)$.*

*Preuve.* Si $\omega - t < d = \operatorname{ht} P = \operatorname{gr}(A/P)$, c'est-à-dire si $t > \omega - d$, on a $\operatorname{Ext}_A^{\omega-t}(M, A) = 0$. D'où $M(t) = 0$ et par suite $M = \Gamma_\omega(M) = \Gamma_{\omega-1}(M) = \cdots = \Gamma_{\omega-d}(M)$.

LEMME 4.4. *Le $A$-module à gauche $\operatorname{Ext}_A^d(\operatorname{Ext}_A^d(M, A), A)$ est non nul.*

*Preuve.* Conservons les notations de 4.2 et supposons que $\operatorname{Ext}_A^d(\operatorname{Ext}_A^d(M, A), A) = 0$. Alors on déduit de la suite exacte correspondante que $M(\omega - d) = 0$ et donc que $M = \Gamma_r(M)$ pour un indice $r \leqslant \omega - d - 1$. Comme $M$ n'est pas nul, il existe un indice $r \leqslant \omega - d - 1$ tel que $M = \Gamma_r(M)$ est distinct de $\Gamma_{r-1}(M)$, i.e., $M(r) \neq 0$. Posons $q = \omega - r$. De la suite exacte:

$$0 \to M/\Gamma_{r-1}(M) \to \operatorname{Ext}_A^q(\operatorname{Ext}_A^q(M, A), A) \to W_r \to 0$$

on déduit, puisque $M(r) \neq 0$, que $\operatorname{Ext}_A^q(\operatorname{Ext}_A^q(M, A), A) \neq 0$. D'après [2] on a:

$$\text{GK-dim}\, \operatorname{Ext}_A^q(\operatorname{Ext}_A^q(M, A), A) = \omega - q = r.$$

Donc $\text{GK-dim}\, M/\Gamma_{r-1}(M) \leqslant \omega - q$. En procédant de la même façon pour tous les $M(u)$ $u = r,\ r - 1,\dots, 0$ on a $\text{GK-dim}\, M(u) \leqslant \omega - q$. Donc [24] on a $\text{GK-dim}\, M \leqslant \omega - q < \omega - d$ et ceci est impossible car $\text{GK-dim}\, M = \text{GKdim}\, A/P = \omega - d$.

Lemme 4.5. *Conservant les notations de* 4.2, *on a* $\mathrm{Fr}(A/P) \simeq \mathrm{Fr}(A/P) \otimes_A \mathrm{Ext}_A^d(\mathrm{Ext}_A^d(M, A), A)$ *où* $M$ *est le* $A$*-module à gauche* $A/P$, $d$ *la hauteur de* $P$ *et* $\mathrm{Fr}(A/P)$ *le corps des fractions de* $A/P$.

*Preuve.* On déduit du lemme 4.4 que $M = \Gamma_{\omega-d}(M)$ et $\mathrm{Ext}_A^d(\mathrm{Ext}_A^d(M, A), A) \neq 0$. D'après le théorème 7.10 Chap. II de [2], le $A$-module à gauche $\mathrm{Ext}_A^d(\mathrm{Ext}_A^d(M, A), A)$ est de GK-dimension pure $\omega - d =$ GK-dim $A/P$, i.e., chaque sous-module non nul de $\mathrm{Ext}_A^d(\mathrm{Ext}_A^d(M, A), A)$ a pour GK-dimension $\omega - d$. Considérons la suite exacte:

$$0 \to M(\omega - d) = M/\Gamma_{\omega-d-1}(M) \to \mathrm{Ext}_A^d(\mathrm{Ext}_A^d(M, A), A) \to W_{\omega-d} \to 0.$$

Supposons démontré que $M(\omega - d) \neq 0$. Alors, d'après la pureté du terme médian de la suite, on a:

$$\text{GK-dim}\, M(\omega - d) = \omega - d = \text{GK-dim}\, M = \text{GK-dim}\, M/\Gamma_{\omega-d-1}(M).$$

Il s'en suit que $\Gamma_{\omega-d-1}(M) = (0)$, car sinon il existerait un idéal à gauche $I$ de $I$, $I \supsetneqq P$ tel que $\Gamma_{\omega-d-1}(M) = I/P$. Soit $a \in I$, $a \notin P$; alors a est régulier dans $M$ et GK-dim $M/Ma \leqslant$ GK-dim $M - 1$, [3]. A fortiori on aurait GK-dim $M/\Gamma_{\omega-d-1} \leqslant \omega - d - 1$, ce qui contredit l'égalité GK-dim $M/\Gamma_{\omega-d-1} = \omega - d$. Le fait que $M(\omega - d)$ est non nul résulte de la démonstration de 4.4, mais résulte aussi de la remarque suivante: si $M(\omega - d) = (0)$ on aurait $W_{\omega-d} = \mathrm{Ext}_A^d(\mathrm{Ext}_A^d(M, A), A)$ et GK-dim$(W_{\omega-d}) = \omega - d$; or $W_{\omega-d}$ est un sous-quotient de la somme directe:

$$\mathrm{Ext}_A^{d+2}(\mathrm{Ext}_A^{d+1}(M, A), A) \amalg \cdots \amalg \mathrm{Ext}_A^{\omega}(\mathrm{Ext}_A^{\omega-1}(M, A), A)$$

et donc, d'après le lemme 7.3 de [2] on a:

$$\text{GK-dim}(W_{\omega-d}) \leqslant \omega - (d + 2) = \omega - d - 2 = \text{GK-dim}\, A/P - 2$$

et on obtient la contradiction: $\omega - d \leqslant (\omega - d) - 2$.

On obtient donc $M(\omega - d) \neq 0$, $\Gamma_{\omega-d-1}(M) = (0)$ et la suite exacte de $A$-modules à gauche:

$$0 \to M \to \mathrm{Ext}_A^d(\mathrm{Ext}_A^d(M, A), A) \to W_{\omega-d} \to 0$$

avec GK-dim $W_{\omega-d} \leqslant$ GK-dim $A/P - 2$. On a donc aussi GK-dim $\bar{W} \leqslant$ GK-dim $A/P - 2$ où $\bar{W} = W/PW$. Il en résulte que $S^{-1}\bar{W} = (0)$ si $S = (A/P)\backslash(0)$; en effet chaque sous-module monogène de $\bar{W}$ est de la forme $A/I$ où $I$ est un idéal à gache de $A$ contenant strictement $P$. Donc $S^{-1}(A/I) = 0$ et $S^{-1}\bar{W} = (0)$. On va en déduire que $\mathrm{Fr}(A/P) \simeq \mathrm{Fr}(A/P) \otimes_A \mathrm{Ext}_A^d(\mathrm{Ext}_A^d(M, A), A)$. Posons $V_d = \mathrm{Ext}_A^d(\mathrm{Ext}_A^d(M, A), A)$. Alors on a la suite exacte: $0 \to A/P \to V_d \to W_{\omega-d} \to 0$ que l'on tensorise à gauche par $A/P$ pour obtenir la suite exacte:

$$\mathrm{Tor}_1^A(A/P, W_{\omega-d}) \to A/P \to \bar{V}_d \to \bar{W}_{\omega-d} \to 0,$$

où $\bar{V}_d = V_d/PV_d$, $\bar{W}_{\omega-d} = W_{\omega-d}/PW_{\omega-d}$. Cette suite se décompose en les trois suites exactes suivantes:

(1) $\mathrm{Tor}_1^A(A/P, W_{\omega-d}) \to J/P \to 0$,

(2) $0 \to J/P \to A/P \to A/J \to 0$,

(3) $0 \to A/J \to \bar{V}_d \to \bar{W}_{\omega-d} \to 0$,

où $J$ est un idéal à gauche de $A$ contenant $P$. Si $J = P$, la suite exacte (3) devient:

$$0 \to \mathrm{Fr}(A/P) \to S^{-1}\bar{V}_d \to S^{-1}\bar{W}_{\omega-d} \to 0,$$

où $S = (A/P)\backslash 0$; comme $S^{-1}\bar{W}_{\omega-d} = 0$, on a $S^{-1}\bar{V}_d = \mathrm{Fr}(A/P)$ et l'assertion est démontrée. Supposons que $J$ contienne strictement $P$ et montrons que l'on arrive à une contradiction. En effet si $J \supsetneqq P$, on a nécessairement GK-dim $A/J \lneqq$ GK-dim $A/P$ car on peut choisir $a \in J$, $a \notin P$ et GK-dim$(A/P + Aa) \leqslant$ GK-dim $A/P - 1$ d'après 1.1–1.4 de [3]. D'autre part nous allons vérifier l'inégalité stricte:

$$\text{GK-dim } \mathrm{Tor}_1^A(A/P, W_{\omega-d}) < \text{GK-dim } A/P. \qquad (*)$$

Il résultera alors de la suite (1) que GK-dim $J/P$ est strictement inférieure à GK-dim $A/P$ et de la suite (2) et de [23] que GK-dim $A/P <$ GK-dim $A/P$, ce qui est la contradiction cherchée.

Pour vérifier $(*)$, on procède de la manière suivante. On tensorise à droite la suite exacte

$$0 \to P \to A \to A/P \to 0$$

par $W_{\omega-d}$ et on obtient la suite exacte:

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^A(A/P, W_{\omega-d}) \to P \otimes_A W_{\omega-d} \to W_{\omega-d} \to \bar{W}_{\omega-d} \to 0.$$

Donc GK-dim $\mathrm{Tor}_1^A(A/P, W_{\omega-d}) \leqslant$ GK-dim$(P \otimes_A W_{\omega-d})$ et puisque $P$ est un idéal bilatère de $A$, la faible-invariance de GK-dimension ([23]) donne l'inégalité:

$$\text{GK-dim}(P \otimes_A W_{\omega-d}) \leqslant \text{GK-dim } W_{\omega-d}$$

et par suite $(*)$ est démontré ainsi que le lemme.

PROPOSITION 4.6. *Soient $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie résoluble de dimension $\omega$ sur un corps $K$ de caractéristique* 0, $A = U(\mathfrak{G})$, *$P$ un idéal premier de hauteur $d$ de $A$, $K$ le corps des fractions de $A/P$ et $M$ le $A$-module à gauche $A/P$. Alors on a:* $\operatorname{Ext}^i_A(M, A) \otimes_A K = (0)$ *pour $i \neq d$ et le rang de Goldie du $A/P$-module à droite* $\operatorname{Ext}^d_A(M, A) \otimes A/P$ *est égal à* 0 *ou* 1 *suivant que la* GK-*dimension de* $\operatorname{Ext}^d_A(M, A) \otimes A/P$ *est strictement inférieure à $\omega - d$ ou égale à $\omega - d$.*

*Preuve.* Posons $N_i = \operatorname{Ext}^i_A(M, A)$; c'est un $A$-module à droite de type fini pour la structure provenant de la structure de $A$-module à droite sur $A$. Si $i < d$, $N_i = (0)$ puisque $d$ est égal au grade de ${}_A M$. Supposons $i > d$; de [2] (lemme 7.3) résulte l'inégalité GK-dim $N_i \leqslant \omega - i$; donc GK-dim $N_i < \omega - d$; par suite $N_i \otimes_A K = (N_i \otimes_A A/P)[S^{-1}] = 0$ pour $i \neq d$ où $S = (A/P) \backslash (0)$ et donc $\operatorname{Ext}^i_A(M, A) \otimes_A K = 0$ pour $i \neq d$.

Posons $N = N_d$ et $\bar{N} = N_d/N_d P$. Nous commencerons par vérifier que $K \otimes_A \operatorname{Ext}^i_A(\bar{N}, A)$ est nul si $i \neq d$ et est isomorphe à $K$ pour $i = d$ sous l'hypothèse que $\operatorname{Ext}^d_A(\bar{N}, A) \neq 0$; les $\operatorname{Ext}^j_A(\bar{N}, A)$ sont munis de la structure de $A$-modules à gauche provenant de celle de $A$. Si $i < d$, $\operatorname{Ext}^i_A(\bar{N}, A) = (0)$, car $\bar{N}$ est un $A/P$-module de type fini, et par suite le grade de $\bar{N}$ est supérieur ou égal à $d > i$. Si $i > d$, d'après le lemme 7.3 de [2], on a l'inégalité:

$$\text{GK-dim} \operatorname{Ext}^i_A(\bar{N}, A) \leqslant \omega - i;$$

d'où GK-dim $\operatorname{Ext}^i_A(\bar{N}, A) < \omega - d =$ GK-dim $A/P$; par suite GK-dim $A/P \otimes_A \operatorname{Ext}^i_A(\bar{N}, A) <$ GK-dim $A/P$ et $S^{-1}(\operatorname{Ext}^i_A(\bar{N}, A)/P \operatorname{Ext}^i_A(\bar{N}, A)) = K \otimes_A \operatorname{Ext}^i_A(\bar{N}, A) = 0$. Supposons que $\operatorname{Ext}^d_A(\bar{N}, A) \neq 0$ et considérons la suite exacte: $0 \to NP \to N \to \bar{N} \to 0$; on obtient: $0 \to \operatorname{Ext}^d_A(\bar{N}, A) \to \operatorname{Ext}^d_A(N, A)$, donc $\operatorname{Ext}^d_A(\bar{N}, A)$ est de pure GK-dimension $\omega - d$. La suite exacte (cf. lemme 4.5)

$$0 \to M = A/P \to \operatorname{Ext}^d_A(N, A) \to W_{\omega - d} \to 0,$$

où GK-dim $W_{\omega - d} \leqslant \omega - d - 2$, induit sur le sous-module $\operatorname{Ext}^d_A(\bar{N}, A)$ de $\operatorname{Ext}^d_A(N, A)$ une suite exacte:

$$0 \to M \cap \operatorname{Ext}^d_A(\bar{N}, A) \to \operatorname{Ext}^d_A(\bar{N}, A) \to (\operatorname{Ext}^d_A(\bar{N}, A) + M)/M \to 0$$

dont le dernier terme, étant un sous-module de $W_{\omega - d}$, est de GK-dimension strictement inférieure à $\omega - d$. De la partitivité de la GK-dimension [23], résulte que la GK-dimension de $M \cap \operatorname{Ext}^d_A(\bar{N}, A)$ est $\omega - d$. On a donc une suite exacte de $A$-modules à gauche:

$$0 \to J/P \to \operatorname{Ext}^d_A(\bar{N}, A) \to \tilde{W} \to 0,$$

où $J$ est un idéal à gauche de $A$, $J \supsetneqq P$ et GK-dim $\tilde{W} < \omega - d$; en tensorisant cette suite avec $A/P$, on obtient:

$$\mathrm{Tor}_1^A(A/P, \tilde{W}) \longrightarrow J/P \to A/P \otimes_A \mathrm{Ext}_A^d(\bar{N}, A) \to \tilde{W}/P\tilde{W} \to 0$$

On vérifie, comme dans le lemme 4.5, que $\mathrm{Tor}_1^A(A/P, \tilde{W})$ est un sous-module de $P \otimes_A \tilde{W}$, donc sa GK-dimension est strictement inférieure à $\omega - d$. Il en résulte que l'application $\varphi$ est nulle, sinon il existerait un idéal à gauche $L$ de $A$, contenant strictement $P$, tel que $\mathrm{Im}\,\varphi = L/P$; on aurait GK-dim$(L/P) < \omega - d$ et GK-dim $A/P = \mathrm{Sup}[GK\text{-dim}\, A/L$, GK-dim$(L/P)]$ serait strictement inférieure à $\omega - d$. Puisque $\mathrm{Im}\,\varphi = (0)$ on a suite exacte:

$$0 \to J/P \to A/P \otimes_A \mathrm{Ext}_A^d(\bar{N}, A) \to \tilde{W}/P\tilde{W} \to 0$$

et, on obtient puisque $J \supsetneqq P$ et que GK-dim $\tilde{W}/P\tilde{W} < \omega - d$, l'isomorphisme:

$$K \simeq K \otimes_A \mathrm{Ext}_A^d(\bar{N}, A).$$

Supposons que la GK-dimension de $\bar{N} = \mathrm{Ext}_A^d(M, A) \otimes_A A/P$ soit égale à $\omega - d$. Alors $\bar{N} \otimes_{A/P} K = \mathrm{Ext}_A^d(M, A) \otimes_A K$ est un $K$-espace vectoriel à droite de dimension finie non nulle. On vient de voir qu'alors $K \otimes_{A/P} \mathrm{Ext}_A^d(\bar{N}, A) \simeq K$. Comme GK-dim $\bar{N} = \omega - d$, il existe au moins un élément $x \in \bar{N}$ dont l'annulateur dans $A$ est $P$, sinon on aurait GK-dim $\bar{N} < \omega - d$, [3, 23]. On a donc une suite exacte de $A$-modules à droite:

$$0 \to A/P \to \bar{N} \to \bar{N}' \to 0.$$

Si GK-dim $\bar{N}' < \omega - d$, le rang de Goldie de $\bar{N}$ est 1 et la démonstration est terminée. Supposons que GK-dim $\bar{N}' = \omega - d$. En relevant un sous-module de $\bar{N}'$ isomorphe à $A/P$ à $\bar{N}$, on obtient une suite exacte de $A/P$-module à droite:

$$0 \to A/P \to H \to A/P \to 0$$

et $H = A/P \amalg A/P$ est un sous-module de $\bar{N}$. Donc on a: $0 \to N \to \bar{N} \to \bar{N}'' \to 0$ et de proche en proche on arrive, car $\bar{N}$ est noethérien, à une suite exacte:

$$0 \to L \to \bar{N} \to \bar{U} \to 0,$$

où $L$ est un $A/P$-module à droite libre de rang $r$ et où GK-dim $\bar{U} < \omega - d$. La suite des $\mathrm{Ext}_A^{\cdot}$ donne la suite exacte de $A$-modules à gauche

$$0 = \mathrm{Ext}_A^d(\bar{U}, A) \to \mathrm{Ext}_A^d(\bar{N}, A) \to \mathrm{Ext}_A^d(L, A) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Ext}_A^{d+1}(\bar{U}, A).$$

D'après [2], GK-dim $\operatorname{Ext}_A^{d+1}(\bar{U}, A) \leqslant \omega - d - 1$, donc GK-dim(Im $\psi$) $\leqslant \omega - d - 1$ et on a la suite exacte

$$0 \to \operatorname{Ext}_A^d(\bar{N}, A) \to \operatorname{Ext}_A^d(L, A) \to \operatorname{Im} \psi \to 0.$$

D'où en tensorisant à gauche par $A/P$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Tor}_1^A(A/P, \operatorname{Im} \psi) \to A/P \otimes \operatorname{Ext}_A^d(\bar{N}, A) \to A/P \otimes \operatorname{Ext}_A^d(L, A) \\ \to A/P \otimes \operatorname{Im} \psi \to 0. \qquad (**) \end{aligned}$$

Comme dans la démonstration de 4.5, on obtient GK-dim $\operatorname{Tor}_1^A(A/P, \operatorname{Im} \psi) \leqslant \omega - d - 1$; d'autre part GK-dim(Im $\psi$)/$P$(Im $\psi$) $\leqslant$ GK-dim Im $\psi \leqslant \omega - d - 1$. La suite $(**)$ se décompose en trois suites:

(1) $\operatorname{Tor}_1^A(A/P, \operatorname{Im} \psi) \to X \to 0$,

(2) $0 \to X \to A/P \otimes \operatorname{Ext}_A^d(\bar{N}, A) \to Y \to 0$,

(3) $0 \to Y \to A/P \otimes \operatorname{Ext}_A^d(L, A) \to A/P \otimes \operatorname{Im} \psi \to 0$.

La première suite montre que GK-dim $X \leqslant \omega - d - 1$ d'où $S^{-1}X = 0$; on a aussi $S^{-1}(A/P \otimes \operatorname{Im} \psi) = 0$ où $S = (A/P)\backslash(0)$. Les suites (2) et (3) donnent l'isomorphisme:

$$K \otimes_A \operatorname{Ext}_A^d(\bar{N}, A) \simeq K \otimes_A \operatorname{Ext}_A^d(L, A)$$

c'est-à-dire

$$K \simeq (K \otimes_A \operatorname{Ext}_A^d(A/P, A))^r,$$

où $r$ est le rang de $L$ sur $A/P$. Donc $r = 1$ et le rang de Goldie de $\bar{N}$ vaut 1. Supposons GK-dim $\operatorname{Ext}_A^d(M, A) \otimes A/P < \omega - d$, alors nécessairement $\operatorname{Ext}_A^d(M, A) \otimes K = (0)$.

THÉORÈME 4.7. *Soient $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie résoluble de dimension $\omega$ sur un corps $k$ de caractéristique* 0, $A = U(\mathfrak{G})$, *$P$ un idéal premier de hauteur $d$ de $A$. Alors $\mu_d(P, A) \neq 0$ et $\mu_i(P, A) = 0$ si $i \neq d$.*

*Preuve.* En raisonnant par l'absurde, on va supposer que $S^{-1} \operatorname{Ext}_A^d(A/P, A) = (0)$, où $S = (A/P)\backslash(0)$ et on arrivera à une contradiction. Le $A$-module à droite $\operatorname{Ext}_A^d(M, A)$, $M = {}_A(A/P)$, étant de type fini, on peut l'écrire $u_1A + \cdots + u_sA$. Par hypothèse, il existe, pour chaque $i$, $a_i \in S$ tel que $a_iu_i = 0$ et [10] il existe $x \in S$ tel que $xu_i = 0$; $i = 1, \ldots, s$. D'où $x(u_1A + \cdots + u_nA) = 0$, puisque $\operatorname{Ext}_A^d(M, A)$ est un bimodule. On a donc trouvé un élément $x \in A$, $x \notin P$, tel que la multiplication à gauche par $x$ dans $\operatorname{Ext}_A^d(M, A)$ soit le morphisme nul. Or la multiplication à gauche par $x$ dans $\operatorname{Ext}_A^d(M, A)$ provient de la multiplication à droite par $x$ dans $M = A/P$.

Puisque $x$ est non diviseur de zéro dans $A/P$, $P$ étant complètement premier, la suite de $A$-modules à gauche suivante est exacte:

$$0 \longrightarrow A/P \xrightarrow{\text{mult}_d x} A/P \longrightarrow A/P + Ax \longrightarrow 0.$$

On en déduit la suite exacte de $A$-modules à droite:

$$\operatorname{Ext}_A^d(A/P + Ax, A) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^d(A/P, A) \xrightarrow{\text{mult}_g x} \operatorname{Ext}_A^d(A/P, A).$$

Mais la GK-dimension du $A$-module à gauche $A/P + Ax$ est strictement inférieure a celle de $A/P$ [3]. Donc $\operatorname{Ext}_A^d(A/P + Ax, A) = 0$ [2]. On a donc:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^d(A/P, A) \xrightarrow{\text{mult}_g x} \operatorname{Ext}_A^d(A/P, A)$$

et comme $x \operatorname{Ext}_A^d(A/P, A) = 0$, on obtient $\operatorname{Ext}_A^d(A/P, A) = 0$ ce qui est la contradiction cherchée.

Notons $N_i$ le $A/P$-$A$-bimodule $\operatorname{Ext}_A^i(A/P, A)$, les Ext étant toujours calculés pour ${}_A(A/P)$. Puisque le $A$-module à droite $N_i$ est de type fini, la GK-dimension de ${}_{A/P}(N_i)$ est inférieure ou égale à la GK-dimension de $(N_i)_A$ [13]. Si $i \in d$, on a $\text{GK-dim}(N_i) < \text{GK-dim}\, A/P$, d'après 4.6. Par suite: $\text{GK-dim}_{A/P}(N_i) < \text{GK-dim}\, A/P$ et, pour tout sous-module $Q$ de type fini de ${}_{A/P}(N_i)$, on a $\text{GK-dim}\, Q < \text{GK-dim}\, A/P$ et alors $\operatorname{Fr}(A/P) \otimes_{A/P} Q = 0$. Comme ${}_{A/P}(N_i)$ est réunion de sous-$A/P$-modules de type fini et que $\otimes$ commute aux limites inductives, il en résulte que $\operatorname{Fr}(A/P) \otimes N_i = 0$.

Soit $A$ un anneau noethérien à droite et à gauche.

Un $A$-module à gauche $M$ est *indécomposable* s'il ne peut s'écrire sous forme d'une somme directe de deux sous-modules propres.

Un idéal à gauche $J$ de $A$ est *$\bigcap$-irréductible* s'il n'est pas intersection de deux idéaux à gauche de $A$ le contenant strictement. Par exemple est $\bigcap$-irréductible un idéal complètement premier.

Rappelons le théorème suivant [16]:

THÉORÈME 4.7. *Un $A$-module à gauche $M$ est injectif indécomposable si et seulement s'il est isomorphe à l'enveloppe injective d'un $A$-module à gauche de la form $A/J$ où $J$ est un idéal à gauche inter-irréductible de $A$ et, dans ce cas, pour tout $x \in M$, $x \neq 0$ l'idéal à gauche* $\operatorname{Ann}_A x$ *est inter-irréductible et $M$ est isomorphe à* $E_A(A/\operatorname{Ann}_A x)$.

DÉFINITION 4.8. On dira qu'un $A$-module injectif est *de type* II s'il est indécomposable et si pour tout $x \in M$, $x \neq 0$ tel que $\operatorname{Ann}_A(x)$ est maximal parmi les annulateurs dans $A$ d'éléments non nuls de $M$, alors $\operatorname{Ann}_A(x)$ n'est pas un idéal bilatère de $A$.

On dira que $M$ est *de type* I s'il existe $x \in M$, $x \neq 0$ tel que $\operatorname{Ann}_A(x)$ est un idéal premier $P$. Il est alors facile de voir que $P = \operatorname{Ann} x$ est un annulateur maximal parmi les annulateurs des éléments non nuls de $M$. En effet supposons $P \subsetneq \operatorname{Ann} z = I$. Par le théorème 4.7, $E(A/P) = E(A/I)$ et en posant $S = A/P \backslash \{0\}$ on aurait $S^{-1} \operatorname{Hom}_A(A/P, E(A/P)) = S^{-1} \operatorname{Hom}_A(A/P, E(A/I))$ c'est-à-dire $\operatorname{Fr}(A/P) = S^{-1} \operatorname{Hom}_A(A/P, E(A/I))$; or $\operatorname{Hom}_A(A/P, E(A/I))$ est une extension essentielle de $A/I$ comme $A/P$-module et $S^{-1}A/I = (0)$ donc $S^{-1} \operatorname{Hom}_A(A/P, E(A/I)) = 0$ ce qui est impossible. Brown [6] a été amené aussi à introduire les modules de type I et II.

PROPOSITION 4.9. *Soit $A = U(\mathfrak{G})$ où $\mathfrak{G}$ est résoluble de dimension finie sur un corps de caractéristique* 0 *et soit $M$ un $A$-module à gauche injectif. Alors*

(1) *Le module $M$ admet une décomposition en somme directe*

$$M = \coprod \nu(P, A)\, E_A(A/P) \coprod N,$$

*où $\coprod \nu(P, A)\, E_A(A/P)$ est la somme directe de $\nu$ copies de l'enveloppe injective à gauche de $A/P$ où $P$ est un idéal premier et où $N$ est somme directe de modules du type* II.

(2) *Si $M = \coprod \nu' E_A(A/P) \coprod N'$ est une autre décomposition de $M$ du même type alors $\nu = \nu'$ et $N \simeq N'$.*

*Preuve.* (1) D'après le théorème 2.5 de [18], le module $M$ admet une décomposition en somme directe d'injectifs indécomposables. Soit $E$ un $A$-module injectif indécomposable non nul et soit $x \in E$, $x \neq 0$, tel que $J = \operatorname{Ann}_A(x)$ soit maximal parmi les annulateurs d'éléments non nuls de $E$. D'après le théorème 4.7, $J$ est inter-irréductible et $E_A(A/\operatorname{Ann}_A x) = E$. Supposons que $\operatorname{Ann}_A(x)$ soit un idéal bilatère de $A$ et montrons qu'il est (complètement) premier. Si $ab \in \operatorname{Ann}_A(x) = J$, $a \notin J$ et $b \notin J$. Alors $abx = 0$. Donc $a \in \operatorname{Ann}_A(bx)$. Si $bx = 0$, alors $b \in J$. Si $bx \neq 0$ on a $\operatorname{Ann}_A x \subseteq \operatorname{Ann}_A(bx)$ car si $cx = 0$ alors $c \in J$ et comme $J$ est bilatère $cb \in J$ donc $c(bx) = 0$. Donc par maximalité $\operatorname{Ann}_A(x) = \operatorname{Ann}_A(bx)$ et $ax = 0$ donc $a \in J$. Donc $E = E_A(A/P)$ et $E$ est de type I ou bien $E = E_A(A/J)$ et $E_A(A/J)$ est de type II.

(2) D'après la proposition 2.7 de [18] la décomposition de $M$ est unique à permutations et isomorphismes près. De plus $E_1 = E(A/P)$, $E_1$ de type I, $P$ premier et $E_2 = E(A/J)$, $E_2$ de type II, ne sont pas isomorphes. En effet $P = \operatorname{Ann}(z)$, $z \in E_1$, $z \neq 0$ et $P$ est maximal parmi les annulateurs des éléments non nuls de $E_1$; s'il existait un isomorphisme $\varphi$: $E_1 \to E_2$ alors $\varphi(z) \in E_2$ et $\operatorname{Ann}_A(\varphi(z)) = P$; en effet $P \subseteq \operatorname{Ann}_A(\varphi(z))$ est évidente et si $a\varphi(z) = 0$ alors en appliquant $\varphi^{-1}$on a: $a\varphi^{-1}\varphi(z) = az = 0$ donc $a \in P$. D'autre part $\operatorname{Ann}_A(\varphi(z))$ serait maximal parmi les annulateurs dans $A$ des éléments non nuls de $E_2$. En effet, supposons que $\operatorname{Ann}_A(\varphi(z)) \subsetneq \operatorname{Ann}_A(y)$,

$y \in E_2$, $y \neq 0$. Alors $\varphi^{-1}(y) \in E_1$, $\varphi^{-1}(y) \neq 0$. On a $\mathrm{Ann}_A(z) \subseteq \mathrm{Ann}_A(\varphi^{-1}(y))$; en effet si $az = 0$, $a\varphi(z) = 0$ donc $ay = 0$ et $a\varphi^{-1}(y) = 0$. Comme $\mathrm{Ann}_A(z)$ est maximal on a $\mathrm{Ann}_A(z) = \mathrm{Ann}_A(\varphi^{-1}(y))$. Il en résulte que $\mathrm{Ann}_A(y) = \mathrm{Ann}_A(\varphi(z))$ car si $ay = 0$ alors $a\varphi^{-1}(y) = 0$ donc $az = 0$ donc $a\varphi(z) = 0$. Par suite ceci contredirait le type de $E_2$.

En conservant les hypothèses de 4.9:

Proposition 4.10. *Soit $E_i$ le i-ème terme de la résolution injective minimale de $A$. Alors*

$$E_i = \coprod_{p \in \mathrm{Spec}(A)} \nu_i(P, A)\, E(A/P) \amalg N_i$$

*où $N_i$ est une somme directe d'injectifs indécomposables de type II et $E(A/P)$ est un injectif indécomposable de type I et l'enveloppe injective sur $A$ du $A$-module à gauche $A/P$ où $P$ est premier. De plus $\nu_i(P, A) = \mu_i(P, A)$. Donc $\nu_i(P, A) = 0$ si $i \neq \mathrm{ht}(P)$ et seuls apparaissent dans le première somme directe les idéaux premiers de hauteurs i. On a $\nu_d(P, A) \neq 0$ si $d = \mathrm{ht}\, P$.*

*Preuve.* Montrons d'abord que pout tout $P$ on a $S^{-1}\,\mathrm{Hom}_A(A/P, N_i) = 0$. Si $\mathrm{Hom}_A(A/P, N_i) \neq 0$, il existe $f$: $A/P \to E(A/I)$, $f \neq 0$, où $E(A/I)$ est irréductible de type II. Alors $f(\bar{1}) \in E(A/I)$, $f(\bar{1}) \neq 0$, et $Pf(\bar{1}) = 0$. Donc $P \subseteq \mathrm{Ann}\, f(\bar{1})$; soit $z \in E(A/I)$, $z \neq 0$ tel que $P \subseteq \mathrm{Ann}(z)$ et que $\mathrm{Ann}(z) = J$ soit maximal parmi les annulateurs des éléments non nols de $E(A/I)$. On a, puisque $E(A/I)$ est de type II, $P \subsetneqq \mathrm{Ann}(z)$ et $E(A/I) = E(A/J)$. Mais $\mathrm{Hom}_A(A/P,\ E_A(A/J))$ est une extension essentielle de $A/J$. Donc si $S = A/P \backslash \{0\}$, $S^{-1}\,\mathrm{Hom}_A(A/P,\ E_A(A/J)) = (0)$ car $S^{-1} A/J = (0)$, $P \subset J$. D'où $S^{-1}f = 0$.

On montre de la même façon que $S^{-1}\,\mathrm{Hom}_A(A/P,\ E(A/Q))$ est nul si $Q \neq P$. En effet si $S^{-1}\,\mathrm{Hom}_A(A/P,\ E(A/Q))$ n'est pas nul, il existe $f$: $A/P \to E(A/Q)$ non nul. On a $Pf(\bar{1}) = 0$; comme $f(\bar{1}) \neq 0$ et que $A/Q$ est essentiel dans $E(A/Q)$, il existe $a \in A$, $af(\bar{1}) \neq 0$ et $af(\bar{1}) \in A/Q$. Soit $y \in A$, $\bar{y} = af(\bar{1})$ alors $y \notin Q$ et $Py \subseteq Q$. Comme $Q$ est complètement premier, $P$ est contenu dans $Q$. Supposant $P \subsetneqq Q$, on termine comme précédemment pour démontrer que $S^{-1}\,\mathrm{Hom}_A(A/P,\ E(A/Q)) = 0$. On a donc $S^{-1}\,\mathrm{Hom}_A(A/P, E_i) = \coprod \nu_i(P,\ A)\ S^{-1}\ \mathrm{Hom}_A(A/P,\ E(A/P)) = \coprod \nu_i(P,\ A)\ S^{-1}\ \mathrm{Hom}_{A/P}(A/P,\ E_{A/P}(A/P)) = \coprod \nu_i(P(A)\,\mathrm{Fr}(A/P)$. Or:

$$\mathrm{Hom}_A(A/P, E_i) = \mathrm{Ext}^i_A(A/P, A).$$

Donc $S^{-1}\,\mathrm{Ext}^i_A(A/P, A) = \coprod \nu_i(P, A)\,\mathrm{Fr}(A/P) = \coprod \mu_i(P, A)\,\mathrm{Fr}(A/P)$. D'où $\nu_i(P, A) = \mu_i(P, A)$. Par suite si $i < \mathrm{ht}\, P$, $\mathrm{Ext}^i_A(A/P, A) = 0$. Donc $\nu_i(P, A) = 0$. Enfin $\nu_d(P, A) = \mu_d(P, A) \neq 0$.

COROLLAIRE 4.11. *On a* $E_d = \coprod_{\mathrm{ht}\,P=d} \mu_d(P,A)\, E(A/P) \amalg N_d$ *pour tout* $d$. *Si, de plus* $\mathfrak{G}$ *est nilpotente, on a* $\mu_d(P,A) = 1$.

*Preuve.* La première partie est évidente. Si $\mathfrak{G}$ est nilpotente $S^{-1}\operatorname{Ext}^i_A(A/P,A) = \operatorname{Ext}^i_{A_P}(A_P/PA_P, A_P) = 0$ si $i > d$ car $A_P$ est régulier de dimension $d$. D'autre part on a $\operatorname{Ext}^d_{A_P}(A_P/PA_P, A_P) = A_P/PA_P \otimes A_P = A_P/A_PP$ [16]. D'où le résultat. ∎

On retrouve ainsi une $n$-ième démonstration de la caténarité de $A$ si $\mathfrak{G}$ est nilpotent. Pour celà il suffit de vérifier (par une démonstration identique au cas commutatif):

PROPOSITION 4.12. *Soit* $\mathfrak{G}$ *nilpotent et soit* $P \supset Q$ *avec* $\mathrm{ht}\, P/Q = 1$, *alors si* $\mu^i(Q,A) > 0$, *on a* $\mu^{i+1}(P,A) > 0$.

*Preuve.* On localise en $P$ et on applique mot à mot la démonstration du résultat correspondant de [1]. On pose $R = A_P$, $P' = PA_P$, $Q' = QA_P$.

On choisit $x \in P' \backslash Q'$, $x$ centralisant modulo $Q'$. Alors la suite $0 \to R/Q' \to R/Q' \to R/(Q' + Rx) \to 0$ est exacte. Donc

$$\operatorname{Ext}^i_R(R/Q', R) \xrightarrow{x} \operatorname{Ext}^i_R(R/Q', R) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{i+1}_R(R/Q' + Rx, R).$$

Or $x \in \operatorname{rad}(R)$. Donc $\operatorname{Ext}^{i+1}_R(R/(Q + Rx), R) \neq 0$ et comme $R/Q' + Rx$ est de longueur finie, ceci entraîne $\operatorname{Ext}^{i+1}_R(R/\mathscr{M}, R) \neq 0$ où $\mathscr{M}$ est l'idéal maximal de $R$. ∎

Si $\mathfrak{G}$ est résoluble, on a évidemment $\mu_0(P,A) = 1$ si $P = (0)$, de plus si $k$ est algébriquement clos:

PROPOSITION 4.15. *On a* $\mu_1(P,A) = 1$ *si* $P$ *est un idéal premier de hauteur* 1.

*Preuve.* On a: $E_1 = \coprod_{P \in P(A)} \mu(P,A)\, E_1(A/P) \amalg N_1$ où $P(A)$ désigne l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de $A$. Soit $SZ(A)$ le semi-centre de $A$ et $T = SZ$; de l'égalité $A = \bigcap_{P \in P(A)} A_P \cap T^{-1}(A)$ (cf. Section 2) résulte la suite exacte:

$$0 \longrightarrow K/A \xrightarrow{\Delta} \prod_{P \in P(A)} K/A_P \times K/T^{-1}A,$$

où $K$ est le corps des fractions de $A$ et $\Delta$ l'application diagonale. De la démonstration de 2.1, résulte que si $x \in K$, alors $x \in A_P$ sauf pour un nombre fini de $P \in P(A)$; donc $\Delta$ est à valeurs dans la somme directe:

$$\coprod_{P \in P(A)} K/A_P \amalg K/T^{-1}A.$$

Puisque $A_P$ est un anneau de valuation de $K$, $K/A_P$ est un $A_P$-module injectif indécomposable. Il est facile de voir que $K/A_P$ est $A$-injectif, car toute application $A$-linéaire $f$ d'un idéal à gauche $I$ de $A$ dans $K/A_P$, se prolonge en une application $A_P$-linéaire $f_P$ de $I_P$ dans $K/A_P$ définie par $f_P(x/t) = t^{-1}f(x)$, $x \in I$, $t \notin P$. D'où un prolongement $\tilde{f}_P$ de $f_P$ à $A_P$ dont la restriction à $A$ fournit un prolongement de $f$.

Les $K/A_P$, $P \in P(A)$, sont les injectifs indécomposables de type 1, $K/A_P$ est isomorphe à l'enveloppe injective sur $A$ de $A/P$; en effet si $x \in K$ il existe une puissance de $P$, soit $n$, tel que $P^n x \in A_P$ donc $\mathrm{Ann}_A(\bar{x}) = P$ si $\bar{x} \in K/A_P$, $\bar{x} \neq 0$, et si $\mathrm{Ann}_A(\bar{x})$ est maximal parmi les annulateurs dans $A$ d'éléments non nul de $K/A_P$.

D'autre part, soit $\bar{x} \in K/T^{-1}A$, $x \in K$, $x \notin T^{-1}A$ tel que $Q = \mathrm{Ann}_A(\bar{x})$ soit maximal dans $A$, parmi les annulateurs d'éléments non nuls $K/T^{-1}A$. Il est clair que $Q \neq 0$. Si $Q$ était un idéal bilatère, il existerait $s \in Q$, $s \in SZ(A)$, $s \neq 0$; alors $sx \in T^{-1}A$ et $x \in T^{-1}A$; d'où $\bar{x} = \bar{0}$, ce qui est impossible. Le $A$-module $K/T^{-1}A$ n'est pas nécessairement injectif mais son enveloppe injective est somme directe d'injectifs indécomposables du type II; en effet posons $X = K/T^{-1}A$ et soit $y \in E_A(X)$, l'enveloppe injective de $X$, $y \neq 0$. Alors il existe $a \in A$, $0 \neq ay \in X$. Supposons $I = \mathrm{Ann}_A(y)$ maximal parmi les annulateurs dans $A$ d'éléments non nuls de $X$ et $I$ bilatère; considérons un élément $z \in X$, $z \neq 0$ tel que $\mathrm{Ann}_A(z)$ soit maximal parmi les annulateurs d'éléments non nuls de $X$ qui contiennent $\mathrm{Ann}(ay)$. Si $by = 0$, alors $bay = 0$, puisque $I$ est bilatère; donc $b \in \mathrm{Ann}(z)$. D'où l'inclusion $I \subseteq \mathrm{Ann}(z)$; de la maximalité de $I$, résulte l'égalité $I = \mathrm{Ann}(z)$ et $\mathrm{Ann}\, z$, $z \in X$, serait bilatère, ce que l'on a vu être impossible.

PROPOSITION 4.16. *Soit* $0 \to A \to \to E_0 \to E_1 \to \cdots$ *une résolution injective minimale du $A$-module à gauche $A$. Soit $P$ un idéal premier de $A$ de hauteur $d$ et supposons que le rang de Goldie du $A/P$-module à gauche* $A/P \otimes_A \mathrm{Ext}^d_A((A/P)_A, A_A)$ *soit égale à* 1. *Alors* $\mathrm{Tor}\, dh_A E_A(A/P) = d = \mathrm{Tor}\, dh_A E_d$ *où $E_A(A/P)$ est l'enveloppe injective du $A$-module à gauche $A/P$.*

*Preuve.* Puisque $E_A(A/P)$ est facteur direct de $E_d$, on a: $\mathrm{Tor}\, dh_A\, E_A(A/P) \leqslant d$ d'après 4.1. On va supposer que $\mathrm{Tor}\, dh_A E_A(A/P) < d$ et arriver à une contradiction. En effet de l'inégalité stricte précédente résulte, par définition de $\mathrm{Tor}\, dh$, que $\mathrm{Tor}^A_d(M, E_A(A/P)) = 0$ pour tout $A$-module à droite $M$ et en particulier pour $M = A/P$. D'où $0 = \mathrm{Tor}^A_d(A/P, \mathrm{Hom}_A(A, E(A/P))) = \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ext}^d_A(A/P, A), E(A/P))$. A fortiori on aurait $\mathrm{Hom}_A(A/P \otimes \mathrm{Ext}^d_A(A/P, A), E(A/P)) = 0$. Mais d'après l'hypothèse, $A/P \otimes \mathrm{Ext}^d_A(A/P, A) = N$ contient un sous-module isomorphe à $A/P$, donc l'application de $A/P$ dans $E_A(A/P)$ se prolonge en un homomorphisme non nul de $N$ dans $E(A/P)$, ce qui contredit $\mathrm{Hom}_A(N, E(A/P)) = 0$.

La fin du paragraphe consiste à démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 4.17. *Soit* $\mathfrak{G}$ *une algèbre de Lie résoluble de dimension finie* $\omega$ *sur un corps* $k$ *de caractéristique* 0 *et* $P$ *un idéal premier de hauteur* $d$ *de* $U(\mathfrak{G}) = A$. *Alors* $\mu_d(P, A) = 1$.

*Preuve.* Pour démontrer le théorème, on commencera par le cas où $\mathfrak{G}$ est complètement résoluble et la démonstration se fera par récurrence sur $\omega$ à partir du cas évident où $\omega = 1$. D'autre part on pourra ne considérer que le cas où $d \geqslant 1$. Une fois le cas complètement résoluble étudié on s'y ramènera par une extension finie galoisienne de $k$.

Supposons donc $\mathfrak{G}$ complètement résoluble, $\omega \geqslant 2$ et le théorème démontré pour toute algèbre de Lie complètement résoluble de dimension $\leqslant \omega - 1$. Soient $\mathscr{H}$ un idéal de $\mathfrak{G}$ de codimension 1 et $B = U(\mathscr{H})$ son algèbre enveloppante. Alors le théorème est vrai pour $B$. On a: $A = B[X, \delta]$, $\delta$ étant une dérivation de $B$ et $X$ une indéterminée. L'idéal $Q = P \cap B$ est un idéal complètement premier de $B$ et $\delta(Q) \subseteq Q$; donc $QA = AQ$ est un idéal bilatère de $A$. Posons $C = A/QA$ et $P' = P/QA$; il est clair que $C = B/Q[X, \delta]$, donc $C$ est intègre, et $P'$ est un idéal complètement premier de $C$. Puisque $A$ est un module libre, à droite et à gauche, sur $B$, on montre facilement les isomorphismes $\mathrm{Ext}^j_A(C, A) \cong A \otimes_B \mathrm{Ext}^j_B(B/Q, B) \simeq C \otimes_B \mathrm{Ext}^j_B(B/Q, B)$ pour tout $j$, où $\mathrm{Ext}^j_A(C, A)$ est muni de la structure de $C$-module à gauche provenant de la structure de $C$-module à droite sur $C$. D'autre part, d'après [23], $\text{GK-dim}\, A - d = \text{GK-dim}\, A/P$ et, puisque $B/Q$ est une sous-algèbre de $A/P$, on a $\text{GK-dim}\, B/Q \leqslant \text{GK-dim}\, A/P$. Donc $\text{GK-dim}\, B/Q = \text{GK-dim}\, A - 1 - \mathrm{ht}\, Q \leqslant \text{GK-dim}\, A - d$ et $d - 1 \leqslant \mathrm{ht}\, Q$; ceci entraîne en particulier que $\mathrm{Ext}^j_A(C, A) = C \otimes_B \mathrm{Ext}^j_B(B/Q, B) = 0$ pour $j < d - 1$. On va examiner successivement deux cas, suivant que $P = QA$ ou non; dans le premier cas, on arrivera assez facilement au résultat pour un calcul direct; dans le cas général où $P \supsetneqq QA$, on utilisera une suite spectrale de changement d'anneaux. Remarquons que si $P = QA$ alors $\mathrm{ht}\, Q = \mathrm{ht}\, P = d$ et si $P \supsetneqq QA$ alors $\mathrm{ht}\, Q = d - 1$; en effet on a: $\text{GK-dim}\, A/P = \omega - d$, $\text{GK-dim}\, A/QA = \omega - \mathrm{ht}(QA) = \text{GK-dim}\, B/Q[X, \delta] = 1 + \text{GK-dim}\, A/Q$, d'après un résultat non publié de Lenaghan; d'où $\text{GK-dim}\, A/QA = 1 + \omega - 1 - \mathrm{ht}\, Q = \omega - \mathrm{ht}\, Q$. Donc si $P = QA$, $\mathrm{ht}\, Q = d$, si $P \supsetneqq QA$ on a $\mathrm{ht}\, QA = \mathrm{ht}\, Q \lneqq \mathrm{ht}\, P = d$. Des inégalités $d - 1 \leqslant \mathrm{ht}\, Q \nleqslant d$ résulte alors que $\mathrm{ht}\, Q = d - 1$.

Supposons donc que $P = QA = AQ$; on a alors $C = A/QA = A/P$. Par hypothèse de récurrence, on a: $\mu_d(Q, B) = 1$. L'isomophisme $\mathrm{Ext}^j_A(A/P, A) \simeq C \otimes_B \mathrm{Ext}^j_B(B/Q, B)$ entraîne l'isomorphisme

$$\mathrm{Fr}(C) \otimes_C \mathrm{Ext}^j_A(A/P, A) \simeq \mathrm{Fr}(C) \otimes_B \mathrm{Ext}^j_B(B/Q, B), \qquad (*)$$

où $\mathrm{Fr}(C)$ désigne le corps des fractions de $C = B/Q[X, \delta]$; comme $S = (B/Q)\backslash\{0\}$ est un système de Ore à droite et à gauche dans $C$, $\mathrm{Fr}(B/Q)$ est un sous-corps de $\mathrm{Fr}(C)$ et $\mathrm{Fr}(C)$ est isomorphe comme $\mathrm{Fr}(C)-\mathrm{Fr}(B/Q)$-bimodule à $\mathrm{Fr}(C)\otimes_{\mathrm{Fr}(B/Q)}\mathrm{Fr}(B/Q)$. Donc:

$$\mathrm{Fr}(C)\otimes_B \mathrm{Ext}^j_B(B/Q,B)\simeq \mathrm{Fr}(C)\otimes_{\mathrm{Fr}(B/Q)}(\mathrm{Fr}(B/Q)\otimes_B \mathrm{Ext}^j_B(B/Q,B)).$$

D'où, pour $j=d$, l'isomorphisme $(*)$ entraîne:

$$\mathrm{Fr}(C)\otimes_C \mathrm{Ext}^d_A(A/P,A)\simeq \mathrm{Fr}(C);$$

il en résulte que $\mu_d(A/P,A)=1$.

Examinons le cas où $P\supsetneq QA$ et considérons la suite spectrale associée aux modules: ${}_C(C/P')$, ${}_AA$, ${}_AC_C$:

$$E_2^{i,j}=\mathrm{Ext}^i_C(C/P',\mathrm{Ext}^j_A(C,A))\Rightarrow H^{i+j}=\mathrm{Ext}^{i+j}_A(A/P,A).$$

Appliquons la proposition 5.7 du chapître XV [7]. On a $E_2^{i,j}=0$ dans chacun des trois cas suivants: si $i+j=d$, $i\neq 1$ et $i\neq 0$, car alors ou bien $i<0$ ou bien $j<d-1=\mathrm{ht}\,Q$, si $i+j=d+1$ et $i\geqslant 3$, car alors $j\leqslant d-2$, si $i+j=d-1$ et $i\leqslant -2$. Donc la suite suivante est exacte:

$$E_2^{1,d-1}\to H^d\to E_2^{0,d-1+1}=E_2^{0,d}.$$

Nous poserons $X=E_2^{1,d-1}=\mathrm{Ext}^1_C(A/P,\ C\otimes_B \mathrm{Ext}^{d-1}_B(B/Q,B))$ et $Y=E_2^{0,d}=\mathrm{Hom}_C(A/P,\ \mathrm{Ext}^d_A(C,A))$. On a donc la suite exacte de $A/P$-modules à gauche:

$$X\to \mathrm{Ext}^d_A(A/P,A)\to Y. \qquad (**)$$

Montrons que $\mathrm{Fr}(A/P)\otimes_{A/P}Y=0$. Posons $S=(B/Q)\backslash 0$, $S$ est un système de Ore à droite et à gauche de $C$, $Y$ est un sous-$B/Q$-module de $C\otimes_{B/Q}\mathrm{Ext}^d_B(B/Q,B)$ et $\mathrm{Fr}(B/Q)=S^{-1}B/Q$. On a $S^{-1}Y\subseteq \mathrm{Fr}(B/Q)\otimes_{B/Q}(C\otimes_{B/Q}\mathrm{Ext}^d_B(B/Q,B))\cong C\otimes_{B/Q}(\mathrm{Fr}(B/Q)\otimes_{B/Q}\mathrm{Ext}^d_B(B/Q,B))$ $=0$ car $\mathrm{ht}\,Q=d-1$. Donc $S^{-1}Y=0$. D'autre part $Y$ est un $A$-module à droite de type fini pour la structure de $A$-module à droite qui provient de celle de $\mathrm{Ext}^d_A(C,A)$. Donc $Y=x_1A+\cdots+x_rA$ et pour chaque $x_i$ il existe $s_i\in B/Q$ tel que $s_ix_i=0$ d'où l'existence de $s\in B/Q$, $s\neq 0$, tel que $sx_i=0$ pour $i=1,\ldots,r$. Alors $sY=0$. Donc $P\subsetneq \mathrm{Ann}_A Y$. Par suite $\mathrm{Fr}(A/P)\otimes_A Y=0$. Il résulte de cela et de $(**)$ la suite exacte:

$$\mathrm{Fr}(A/P)\otimes_A X\to \mathrm{Fr}(A/P)\otimes_A \mathrm{Ext}^d_A(A/P,A)\to 0.$$

On démontre ensuite que $\mathrm{Fr}(A/P)\otimes_A X\simeq \mathrm{Fr}(A/P)$; il en résultera, puisque $\mu_d(P,A)\neq 0$, l'isomorphisme $\mathrm{Fr}(A/P)\simeq \mathrm{Fr}(A/P)\otimes_A \mathrm{Ext}^d_A(A/P,A)$, d'où $\mu_d(P,A)=1$. Posons $L=\mathrm{Fr}(B/Q)$, alors $\mathrm{Fr}(B/Q)\otimes_{B/Q}C=L[X,\delta]$, et posons $Z=C\otimes_B \mathrm{Ext}^{d-1}_B(B/Q,B)=C\otimes_{B/Q}\mathrm{Ext}^{d-1}_B(B/Q,B)$. Alors $L[X,\delta]\otimes_C \mathrm{Ext}^1_C(A/P,Z) = (\mathrm{Fr}(B/Q)\otimes_{B/Q}C)\otimes_C \mathrm{Ext}^1_C(A/P,Z) =$

$\mathrm{Fr}(B/Q) \otimes_{B/Q} \mathrm{Ext}^1_C(A/P, Z) = \mathrm{Ext}^1_{S^{-1}C}(S^{-1}(A/P), S^{-1}Z)$ où $S = (B/Q)\backslash(0)$ est un système de Ore dans $C$, $S^{-1}C = L[X, \delta]$; on a $S^{-1}Z = S^{-1}C \otimes_{S^{-1}B/Q} S^{-1} \mathrm{Ext}^{d-1}_B(B/Q, B) = L[X, \delta] \otimes_L L$ d'après l'hypothèse de récurrence. D'où $S^{-1}Z = L[X, \delta]$. Donc $L[X, \delta] \otimes_C \mathrm{Ext}^1_C(A/P, Z) = \mathrm{Ext}^1_{L[X,\delta]}(S^{-1}(C/P'), L[X, \delta])$ c'est-à-dire que $L[X, \delta] \otimes_C X = \mathrm{Ext}^1_{L[X,\delta]}(S^{-1}C/P'S^{-1}C, L[X, \delta])$. Mais

$$\mathrm{Fr}(A/P) \otimes_C X = \mathrm{Fr}(A/P) \otimes_{L[X,\delta]} (L[X, \delta] \otimes_C X)$$

et $\mathrm{Fr}(A/P) \otimes_{A/P} X = \mathrm{Fr}(A/P) \otimes_C X$ car $A/P$ est un quotient de $C$

$$\mathrm{Fr}(A/P) \otimes_{A/P} X = \mathrm{Fr}(A/P) \otimes_{L[X,\delta]} \mathrm{Ext}^1_{L[X,\delta]}(S^{-1}C/P'S^{-1}C, L[X, \delta])$$

et $\mathrm{Fr}(A/P) = \mathrm{Fr}(S^{-1}C/P'S^{-1}C)$. On est ramené à étudier le cas où $L[X, \delta]$ est une extension de Ore d'un corps gauche $L$; c'est un anneau principal à droite et à gauche; $P'L[X, \delta]$ est un idéal bilatère complètement premier. Soit $h$ un générateur à gauche de $P'L[X, \delta]$. On a l'expression $\mathrm{Fr}(L[X, \delta]/L[X,\delta]h) \otimes_{L[X,\delta]} \mathrm{Ext}^1_{L[X,\delta]}(L[X, \delta]/L[X, \delta]h, L[X, \delta])$. D'après [8] on sait que $h$ est un élément normalisant de $L[X, \delta]$, qui peut d'ailleurs être central, et $L[X, \delta]h$ est maximal à droite et à gauche car il est complètement premier. D'après le théorème 2.4 de [1] l'idéal complètement premier $L[X, \delta]h$ est localisable. Si $V$ désigne le localisé de $L[X, \delta]$ en $L[X, \delta]h$, alors $V$ est un anneau de valuation discrète de rang 1 de son corps des fractions $F$ et $V/hV$ est le corps résiduel de $V$. Donc $\mathrm{Fr}(L[X, \delta]/L[X, \delta]h) \otimes_{L[X,\delta]} \mathrm{Ext}^1_{L[X,\delta]}(L[X, \delta]/L[X, \delta]h, L[X, \delta]) = \mathrm{Ext}^1_V(V/hV, V)$. Le $V$-module $F/V$ est un $V$-module injectif indécomposable et c'est l'enveloppe injective sur $V$ de $V/hV$. Donc $\mathrm{Ext}^1_V(V/hV, V) \simeq \mathrm{Hom}_V(V/hV, F/V) \simeq \mathrm{Hom}_V(V/hV, V/hV) \simeq V/hV = \mathrm{Fr}(L[X, \delta]/L[X, \delta]h) = \mathrm{Fr}(A/P)$.

Supposons l'algèbre de Lie résoluble G quelconque et soit $\tilde{k}$ une extension galoisienne finie de $k$ telle que $\tilde{k} \otimes_k \mathfrak{G}$ soit complètement résoluble. Si $P$ est un idéal premier de $A = U(\mathfrak{G})$ alors, d'après 3.4.2, [10] $\tilde{k} \otimes P = \tilde{P}_1 \cap \cdots \cap \tilde{P}_s$ où les $\tilde{P}_i$ sont des idéaux premiers de $\tilde{k} \otimes A$ que permute transitivement le group de Galois de $\tilde{k}$ sur $k$ et $P = A \cap \tilde{P}_i$ pour tout $i = 1, \ldots, s$. De plus [25], $d = \mathrm{ht}\, P = \mathrm{ht}\, \tilde{P}_i$ pour $i = 1, \ldots, s$.

Si $s = 1$ alors $\mathrm{Ext}^d_{\tilde{A}}(\tilde{A}/\tilde{P}, \tilde{A}) = \tilde{k} \otimes_k \mathrm{Ext}^d_A(A/P, A)$. D'après la première partie de la démonstration $\mathrm{Ext}^d_{\tilde{A}}(\tilde{A}/\tilde{P}, \tilde{A})$ est un $\tilde{A}/\tilde{P}$-module à gauche de rang de Goldie égale à 1 donc de la forme $U + W$ où $U \simeq \tilde{A}/\tilde{P}$ et où tout $x \in W$ a pour annulateur dans $\tilde{A}$ un idéal à gauche $I$ contenant strictement $\tilde{P}$. D'après un résultat de S. Yammine [26] dont on trouvera une démonstration plus loin, un tel idéal à gauche $I$ coupe $A$ en un idéal à gauche de $A$ qui contient strictement $P$. Donc en posant $T = A/P\backslash(0)$ on a: $T^{-1}(\tilde{A}/I) = 0$ pour tout tel idéal $I$ et par suite $T^{-1}W = (0)$ d'où $T^{-1} \mathrm{Ext}^d_{\tilde{A}}(\tilde{A}/\tilde{P}, \tilde{A}) \simeq T^{-1}(\tilde{A}/\tilde{P}) \simeq \tilde{k} \otimes_k T^{-1} \mathrm{Ext}^d_A(A/P, A)$ et $T^{-1}(\tilde{A}/\tilde{P}) = T^{-1}(\tilde{k} \otimes A/P) = \tilde{k} \otimes \mathrm{Fr}(A/P)$. Donc nécessairement $\mu_d(P, A) = 1$. Supposons que $s \geqslant 2$. Alors on a une suite exacte de $A$-bimodules

$$0 \to \tilde{A}/\tilde{k} \otimes P \xrightarrow{\Delta} \prod_{i=1}^{s} \tilde{A}/\tilde{P}_i \to \tilde{A}/R \to 0,$$

où $\Delta$ est l'application diagonale et où $R$ est un idéal bilatère de $\tilde{A}$ contenant strictement les $\tilde{P}_i$, $i = 1,..., s$, d'où d'après le lemme cité de S. Yammine, $T^{-1}\tilde{A}/R = (0)$. Par suite $\tilde{k} \otimes \mathrm{Fr}(A/P) \simeq \prod_{i=1}^{s} T^{-1}\tilde{A}/\tilde{P}_i$; de plus puisque $\mathrm{ht}\, R \gneqq d$, il résulte de la suite exacte précédente, la suite exacte de $\tilde{A}/\tilde{k} \otimes P$-modules à gauche:

$$0 \to \prod_{i=1}^{s} \mathrm{Ext}_{\tilde{A}}^{d}(\tilde{A}/\tilde{P}_i, \tilde{A}) \to \tilde{k} \otimes_k \mathrm{Ext}_{A}^{d}(A/P, A) \to \mathrm{Ext}_{A}^{d+1}(\tilde{A}/R, \tilde{A});$$

$T = (A/P)\backslash(0)$ est un système de Ore dans $\tilde{A}/\tilde{k} \otimes P = \tilde{k} \otimes A/P$ et $\mathrm{Ext}_{A}^{d+1}(\tilde{A}/R, \tilde{A})$ est un $\tilde{A}/R$-module à gauche. Donc $T^{-1}\,\mathrm{Ext}_{A}^{d+1}(\tilde{A}/R, \tilde{A}) = 0$. D'où:

$$\prod_{i=1}^{s} T^{-1}\,\mathrm{Ext}_{\tilde{A}}^{d}(\tilde{A}/\tilde{P}_i, \tilde{A}) \simeq \tilde{k} \otimes_k T^{-1}\,\mathrm{Ext}_{A}^{d}(A/P, A).$$

D'après la première partie de la démonstration, chaque $\mathrm{Ext}_{\tilde{A}}^{d}(\tilde{A}/\tilde{P}_i, \tilde{A})$ est de rang de Goldie égale à 1 sur $\tilde{A}/\tilde{P}_i$. Donc $\mathrm{Ext}_{\tilde{A}}^{d}(\tilde{A}/\tilde{P}_i, \tilde{A}) = U_i + W_i$, où $U_i \simeq \tilde{A}/\tilde{P}_i$ et $T^{-1}W_i = 0$. On a donc $\prod_{i=1}^{s} T^{-1}(\tilde{A}/\tilde{P}_i) \simeq \tilde{k} \otimes_k S^{-1}\,\mathrm{Ext}_{A}^{d}(A/P,\, A)$ et $\prod_{i=1}^{s} T^{-1}(\tilde{A}/\tilde{P}_i) \simeq \tilde{k} \otimes \mathrm{Fr}(A/P)$. Donc $\mu_d(P, A) = 1$.

Pour terminer la démonstration de 4.17 il suffit de démontrer le lemme suivant qui n'est qu'un cas particulier d'un résultat de S. Yammine, corollaire 1.2 de [26].

LEMME 4.18. *Soit* $A = U(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{G}$ *une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur un corps k de caractéristique* 0, $\tilde{k}$ *une extension de degré fini de k*, $\tilde{A} = \tilde{k} \otimes U(\mathfrak{G})$. *Soit* $\tilde{P}$ *un idéal premier de* $\tilde{A}$ *et* $\tilde{I}$ *un idéal à gauche de* $\tilde{A}$ *tel que* $\tilde{P} \subseteq \tilde{I}$. *Si* $\tilde{P} \cap A = \tilde{I} \cap A$ *alors* $\tilde{P} = \tilde{I}$.

*Preuve.* Il suffit de vérifier que $\tilde{I} \subseteq \tilde{P}$. Posons $P = \tilde{P} \cap A$. Alors $\bar{A} = A/P$ est un sous-anneau de $\tilde{A}/\tilde{P}$. Si $\tilde{I}$ n'était pas contenu dans $\tilde{P}$, $J = \tilde{I}/\tilde{P}$ serait un idéal à gauche propre de $\tilde{A}/\tilde{P}$. Il existerait $x \in J$, $x \neq 0$, donc $x$ non diviseur de zéro dans $\tilde{A}/\tilde{P}$. Mais $x$ est entier à gauche sur $A/P$ c'est-à-dire vérifie une relation $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ où $a_i \in A/P$ ([25] 2.4). Il existerait donc $x' \in \tilde{A}/\tilde{P}$, $x' \neq 0$ tel que $x'x \in A/P\backslash\{0\}$ ([25], Proposition 2.3(2)). Donc $0 \neq x'x \in J$ ce qui contredit le fait que $J \cap (A/P) = (0)$.

## 6. Dualité entre Tor et Ext

PROPOSITION 5.1. *Soit $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur un corps $k$ de caractéristique 0, $P$ un idéal premier de hauteur $d$ de $A = U(\mathfrak{G})$. Alors si $K$ désigne le corps des fractions de l'anneau $A/P$, on a pour tout $A$-module à gauche $N$ de type fini: $K \otimes_{A/P} \mathrm{Ext}_A^i(A/P, N) = 0$ si $i > d$ et $K \otimes_{A/P} \mathrm{Ext}_A^{d-i}(A/P, N) \simeq K \otimes_{A/P} \mathrm{Tor}_i^A(\mathrm{Ext}_A^d(A/P, A), N) \simeq \mathrm{Tor}_i^A(K \otimes \mathrm{Ext}_A^d(A/P, A), N)$ pour $0 \leqslant i \leqslant d$.*

*Preuve.* Pour démontrer la première partie de la proposition, on procède par récurrence sur la dimension homologique sur $A$ du $A$-module $N$. Si $N$ est libre de type fini, l'assertion résulte immédiatement de 4.7. Supposons que l'assertion soit vraie pour tout $A$-module de type fini et de dimension homologique $\leqslant t-1$ et soit $t = dh_A N$, $t \geqslant 1$. On considère une suite exacte: $0 \to N' \to L \to N \to 0$ où $L$ est un $A$-module libre de type fini; alors $dh_A N' = t-1$. Pour tout $j < d$ on a la suite exacte de $A/P$-modules:

$$\mathrm{Ext}_A^j(A/P, L) \to \mathrm{Ext}_A^j(A/P, N) \to \mathrm{Ext}_A^{j+1}(A/P, N')$$

et puisque $S = (A/P)\backslash\{0\}$ est un système de Ore dans $A/P$, donc dans tout $A/P$-module à gauche, on obtient

$$0 = S^{-1}\,\mathrm{Ext}_A^j(A/P, L) \to S^{-1}\,\mathrm{Ext}_A^j(A/P, N) \to S^{-1}\,\mathrm{Ext}^{j+1}(A/P, N') = 0.$$

D'où $K \otimes_{A/P} \mathrm{Ext}_A^j(A/P, N) = (0)$. Considérons le foncteur $T$, de la catégorie des $A$-modules à gauche de type fini dans la catégorie des $K$-espaces vectoriels, suivant: $T(N) = K \otimes_{A/P} \mathrm{Ext}_A^d(A/P, N)$. C'est un foncteur covariant, exact à droite: si $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ est une suite exacte de $A$-modules à gauche de type fini, on a la suite exacte de $K$-espaces vectoriels à gauche: $T(N') \to T(N) \to T(N'') \to 0$ d'après ce qui précède. D'autre part, on vérifie facilement que le $i$-ème dérivé de $T$ coïncide avec $K \otimes \mathrm{Ext}_A^{d-i}(A/P, -)$. Considérons le foncteur $G = K \otimes_{A/P} \mathrm{Ext}_A^d(A/P, A) \otimes_A -$; c'est un foncteur covariant exact à droite. Il suffit de vérifier que $F$ coïncide avec $T$ pour en déduire que leurs dérivés coïncident. On a évidemment $G(L) \simeq T(L)$ pour tout $A$-module libre de type fini $L$ et si $L \to L'$ est un morphisme de $A$-modules à gauche libre de type fini, le carré:

$$\begin{array}{ccc} G(L) & \longrightarrow & G(L') \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(L) & \longrightarrow & T(L') \end{array}$$

est commutatif. Si $N$ est un $A$-module à gauche de type fini arbitraire, soit:

$L_2 \to L_1 \to N \to 0$ une présentation libre de type fini de $N$. D'où le diagramme:

$$\begin{tikzcd} G(L_2) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & G(L_1) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & G(N) \arrow[r] & 0 \\ T(L_2) \arrow[r] & T(L_1) \arrow[r] & T(N) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où le premier carré est commutatif. On en déduit un isomorphisme: $G(N) \simeq T(N)$. On a ainsi les isomorphismes:

$$K \otimes_{A/P} \mathrm{Ext}_A^{d-i}(A/P, N) \simeq \mathrm{Tor}_i^A(K \otimes \mathrm{Ext}_A^d(A/P, A), N)$$

pour $0 \leqslant i \leqslant d$. Le second isomorphisme résulte du lemme bien connu suivant:

LEMME 5.2. *Soit $P$ un idéal complètement premier d'un anneau $R$ noethérien à droite et à gauche. Soit $L$ le corps des fractions de $R/P$. On a des isomorphismes fonctoriels*:

$L \otimes_{R/P} \mathrm{Tor}_j^R(R/P, -) \simeq \mathrm{Tor}_j^R(L, -)$ *pour tout $j$, où la structure de $R/P$-module à gauche sur* $\mathrm{Tor}_j^R(R/P, -)$ *provient de celle de $R/P$.*

*Preuve.* De la suite spectrale suivante:

$$\mathrm{Tor}_i^{R/P}(L, \mathrm{Tor}_j^R(R/P, -)) \Rightarrow \mathrm{Tor}_{i+j}^R(L, -)$$

résulte, puisque $L$ est plat comme $A/P$-module à droite, les isomorphismes: $L \otimes_{R/P} \mathrm{Tor}_j^R(R/P, -) \simeq \mathrm{Tor}_j^R(L, -)$.

Remarquons que lorsque $K \otimes_{A/P} \mathrm{Ext}_A^d(A/P, A)$ est isomorphe à $K$ comme $A-A$-bimodule, l'isomorphisme de 5.1 devient: $K \otimes_{A/P} \mathrm{Ext}_A^{d-i}(A/P, N) \simeq \mathrm{Tor}_i^A(K, N) \simeq K \otimes_{A/P} \mathrm{Tor}_i^A(A/P, N)$ pour $0 \leqslant i \leqslant d$. Un tel isomorphisme est démontré pour tout $i$ et tout $A$-module à gauche $N$ lorsque $\mathfrak{G}$ est nilpotente [16].

Un tel résultat est encore valable pour l'algèbre résoluble de dimension 2, $\mathfrak{G} = ku \oplus kv$ avec $[u, v] = u$. En effet dans ce cas le semi-centre de $A = U(\mathfrak{G})$ est l'anneau $k[u] = B$ des polynômes en une indéterminée sur $k$. Si $P = (0)$ on a $K \otimes_A (A \otimes N) \simeq K \otimes_A \mathrm{Hom}_A(A, N)$ et $K \otimes \mathrm{Ext}_A^{-i}(A/P, -) = \mathrm{Tor}_i^A(\mathrm{Fr}(A), -) = 0$ pour $i > 0$. Si $P \neq (0)$, $P$ est engendré par une suite régulière normalisante de longueur 1 ou 2 et $\mathrm{Tor}_i^A(A/P, N) \simeq \mathrm{Ext}_A^{d-i}(A/P, N)$ pour $d = 1$ ou 2 et tout $i$, d'après ([16], Prop. 2), et tout $A$-module à gauche $N$.

On va obtenir ce résultat pour des algèbres résolubles quelconques avec des hypothèses supplémentaires sur $P$.

LEMME 5.3. *Soit $A = U(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{G}$ résoluble, et $P$ un idéal premier de hauteur $d$ de $A$ et $I$ un $A$-module à gauche injectif. Alors on a*

$$\operatorname{Tor}_j^A(A/P, I) = 0 \qquad \textit{pour} \quad j < d,$$

*où $A/P$ est considéré comme $A$-module à droite.*

*Preuve.* Comme $I$ est injectif, $A$ noethérien et $A/P$ de type fini sur $A$ on a les isomorphismes

$$\operatorname{Tor}_j^A(A/P, I) = \operatorname{Tor}_j^A(A/P, \operatorname{Hom}_A(A, I)) = \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Ext}_A^j(A/P, A), I),$$

où la structure de $A$-module à gauche de $\operatorname{Ext}_A^j(A/P, A)$ provient de la structure de $A$-module à gauche de $A$. Comme $\operatorname{Ext}_A^j(A/P, A) = 0$ si $j < \operatorname{ht} p$, on a résultat.

LEMME 5.4. *Soit $P$ un idéal premier de $A = U(\mathfrak{G})$. Si* $\operatorname{Fr}(A/P) \otimes \operatorname{Tor}_i^A(A/P, I) = 0$ *pour $i >$* ht *$P$ et pour tout $A$-module à gauche injectif alors* $\operatorname{Fr}(A/P) \otimes \operatorname{Tor}_i^A(A/P, -) = 0$ *pour $i >$* ht *$P$.*

*Preuve.* Soit $N$ un $A$-module à gauche. On raisonne par récurrence sur la dimension injective de $N$. Le lemme est vrai par hypothèse si di $N = 0$. Supposons que di $N = u \geqslant 1$ et le lemme démontré pour tous les $A$-modules à gauche de dimension injective $\leqslant u - 1$. Soit $I$ l'enveloppe injective de $N$. On a $0 \to N \to I \to N' \to 0$ et di $N' = u - 1$. D'où la suite exacte:

$$\operatorname{Tor}_{i+1}^A(A/P, N') \to \operatorname{Tor}_i^A(A/P, N) \to \operatorname{Tor}_i^A(A/P, I).$$

D'où en tensorisant par le $A/P$-module à droite plat $\operatorname{Fr}(A/P) \otimes \operatorname{Tor}_i^A(A/P, N) = 0$ si $i > \operatorname{ht} P$.

LEMME 5.6. *Soit $P$ un idéal premier de $A = U(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{G}$ résoluble, et $I$ un $A$-module à gauche injectif. On suppose que, pour tout $j \neq d$, le $A$-module à gauche* $\operatorname{Ext}_A^i((A/P)_A, A_A)$ *est annulé par $P$. Alors*: $\operatorname{Fr}(A/P) \otimes_A \operatorname{Tor}_j^A(A/P, I) = (0)$ *pour $j \neq d$.*

*Preuve.* Puisque$_A I$ est injectif, on a les isomorphismes:

$$\begin{aligned}\operatorname{Tor}_j^A((A/P)_A, I) &= \operatorname{Tor}_j^A((A/P)_{A,A} \operatorname{Hom}(A, I)) \\ &\simeq \operatorname{Hom}_A({}_A\operatorname{Ext}_A^j((A/P)_A, A_A), I)\end{aligned}$$

où la structure de $A$-module à gauche de $M = \operatorname{Ext}_A^j((A/P)_A, A_A)$ provient de celle de $A$. D'après 4.6, on a $\operatorname{Fr}(A/P) \otimes_A M = 0$ si $j \neq d$. Par hypothèse $M$ est un $A/P$-module à gauche. Donc $\operatorname{Hom}_A(M, I) = \operatorname{Hom}_{A/P}(M, J)$ où $J$ désigne l'annulateur de $P$ dans $I$. Alors $\operatorname{Fr}(A/P) \otimes_A \operatorname{Hom}_A(M, I) = S^{-1} \operatorname{Hom}_{A/P}(M, J)$ où $S = (A/P) \backslash (0)$. D'autre part $M$ est un $A/P$-module à gauche de type fini et $M[S^{-1}]=0$ pour $j \neq d$, d'après 4.7. Si $x_1,\dots,x_r$ est un système de générateurs du $A/P$-module à gauche $M$, il existe $s \notin P$ tel que $x_i s = 0$ pour $i = 1,\dots,r$. Donc, puisque $M$ est un bimodule, $Ms = 0$. Si $f \in \operatorname{Hom}_{A/P}(M, J)$, on a $(sf)(m) = f(ms) = 0$ pour tout $m \in M$. Donc $S^{-1}\operatorname{Hom}_{A/P}(M, J) = 0$ et par suite $\operatorname{Fr}(A/P) \otimes \operatorname{Tor}_j^A((A/P)_A, I) = 0$, $j \neq d$.

PROPOSITION 5.7. *Soit $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur un corps $k$ de caractéristique* 0. *Soit $P$ un idéal premier de hauteur $d$ de $A = U(\mathfrak{G})$. On suppose que $P\operatorname{Ext}_A^i((A/P)_A, A_A) = 0$ pour tout $i$ et que $\operatorname{Ext}_A^d((A/P)_A, A_A) \otimes \operatorname{Fr}(A/P)$ est isomorphe à $\operatorname{Fr}(A/P)$ comme $A$-bimodule. Alors on a, pour tout $A$-module à gauche $N$ et tout $i$, un isomorphisme*:

$$\operatorname{Tor}_i^A(\operatorname{Fr}(A/P), N) \simeq \operatorname{Ext}_A^{d-i}(\operatorname{Fr}(A/P), N).$$

*Preuve.* Il suffit de prouver que pour tout $A$-module à gauche injectif $I$, on a:

$$\operatorname{Tor}_d^A(\operatorname{Fr}(A/P), I) \simeq \operatorname{Fr}(A/P) \otimes_{A/P} \operatorname{Hom}_A(A/P, I)$$

de telle sorte que si $I \to I'$ est un homomorphisme de $A$-modules injectifs alors le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Tor}_d^A(\operatorname{Fr}(A/P), I) & \longrightarrow & \operatorname{Toe}_d^A(\operatorname{Fr}(A/P), I') \\
\downarrow & & \downarrow \\
\operatorname{Fr}(A/P) \otimes_A \operatorname{Hom}_A(A/P, I) & \longrightarrow & \operatorname{Fr}(A/P) \otimes_A \operatorname{Hom}_A(A/P, I').
\end{array}$$

Ensuite un raisonnement par récurrence sur la dimension injective (nécessairement finie) de $N$ fournira la proposition.

On peut supposer que $I$ est indécomposable car Tor commute aux sommes directes ainsi que $\operatorname{Hom}_A(A/P, -)$ qui est l'annulateur de $P$ dans $(-)$. On montre comme dans 4.10 que $\operatorname{Fr}(A/P) \otimes_{A/P} \operatorname{Hom}(A/P, I) = 0$ si $I$ est de type II ou si $I$ est de type I et de la forme $E(A/Q)$ où $Q$ est un idéal premier de $A$, distinct de $P$. Si $I = E(A/P)$ alors: $\operatorname{Fr}(A/P) \otimes_{A/P} \operatorname{Hom}_A(A/P, I) \simeq \operatorname{Fr}(A/P)$ comme $A$-module à gauche. D'autre part $\operatorname{Tor}_d^A(\operatorname{Fr}(A/P), I) = \operatorname{Fr}(A/P) \otimes \operatorname{Tor}_d^A(A/P, I) = \operatorname{Fr}(A/P) \otimes \operatorname{Tor}_d^A(A/P, \operatorname{Hom}(A, I)) = \operatorname{Fr}(A/P) \otimes \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Ext}_A^d((A/P)_A, A_A), I)$. Par hypothèse $\operatorname{Ext}_A^d((A/P)_A, A_A)$ est un $A/P$-module et on vérifie comme précédemment que $\operatorname{Fr}(A/P) \otimes \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Ext}_A^d((A/P)_A, A_A), I) = 0$ si $I$ n'est pas isomorphe à $E(A/P)$. Si $I = E(A/P)$, $\operatorname{Fr}(A/P) \otimes_A \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Ext}_A^d((A/P)_A, A_A), I) \simeq S^{-1}\operatorname{Hom}_{A/P}(\operatorname{Ext}_A^d(A/P, A), J)$ où $J$ est l'annulateur de $P$ dans $I$. D'où $\operatorname{Tor}_d^A(\operatorname{Fr}(A/P, I) \simeq \operatorname{Hom}_{\operatorname{Fr}(A/P)}(S^{-1}\operatorname{Ext}_A^d(A/P, A), S^{-1}J) \simeq \operatorname{Hom}_{\operatorname{Fr}(A/P)}(\operatorname{Fr}(A/P), \operatorname{Fr}(A/P)) \simeq \operatorname{Fr}(A/P)$.

Enfin si $\varphi$: $I \to I'$ est un homomorphisme de $A$-modules injectifs, on peut supposer, d'après ce qui précède que $I = I' = E(A/P)$. D'où en posant $K = \mathrm{Fr}(A/P)$ et $S = (A/P)\backslash(0)$ une suite de carrés commutatifs:

$$\begin{tikzcd}
K \otimes \mathrm{Tor}_d^A(A/P, E(A/P)) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & K \otimes \mathrm{Tor}_d^A(A/P, E(A/P)) \arrow[d, "\wr"] \\
K \otimes \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ext}_A^d(A/P, A), E(A/P)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & K \otimes \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ext}_A^d(A/P, A), E(A/P)) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Hom}_K(S^{-1}\,\mathrm{Ext}_A^d(A/P, A), K) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_K(S^{-1}\,\mathrm{Ext}_A^d(A/P, A), K) \arrow[d, equal] \\
K \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & K \arrow[d, equal] \\
K \otimes \mathrm{Hom}_A(A/P, E(A/P)) \arrow[r] & K \otimes \mathrm{Hom}_A(A/P, E(A/P))
\end{tikzcd}$$

## BIBLIOGRAPHIE


1. H. BASS, On the ubiquity of Gorenstein rings, *Math. Zeit.* **82** (1963), 8–28.
2. J. E. BJÖRK, "Rings of Differential Operators," North-Holland Math. Library Vol. 21, Amsterdam, 1979.
3. W. BORHO, Invariant dimension and restricted extension of Noetherian rings, à paraître.
4. N. BOURBAKI, "Algèbre commutative: Diviseurs," Chap. 7, Hermann, Paris, 1965.
5. K. A. BROWN, C. R. HARJANARIS, ET A. B. MAC EACHARN, Noetherian Rings of Finite Global Dimension," Warwick Notes, février 1979.
6. K. A. BROWN, Links and localization in enveloping algebras, à paraître.
7. H. CARTAN ET S. EILENBERG, "Homological Algebra," Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1956.
8. G. CAUCHON, Idéaux bilatères et centre des anneaux de polynômes de Ore sur les anneaux quasi-simples, "Séminaire d'Algèbre-P. Dubreil 1977/78," Lecture Notes in Math. no. 740, pp. 397–407, Springer-Verlag, New York.
9. M. CHAMARIE, "Anneaux de Krull non commutatifs," Thèse d'État ès Sciences Mathématiques, Université Claude Bernard, Lyon, 1981.
10. J. DIXMIER, "Algèbres enveloppantes," Gauthier-Villars, Paris, 1974.
11. I. GELFAND ET A. KIRILLOV, Sur les corps liés aux algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie, Publ. I.H.E.S. No. 31, 1966.
12. A. W. GOLDIE, The structure of prime rings under ascending chain conditions, *Proc. London Math. Soc.* (3) **8** (1958), 589–608.
13. T. LENAGAN, Gelfand–Kirillov—Dimension and affine P.I. rings, *Comm. Algebra* **10**, No. 1 (1982), 87–92.
14. T. LEVASSEUR, Le grade des modules sur certains anneaux filtrés, *Comm. Algebra* **9** (15) (1981), 1519–1532.
15. J. C. MACCONNELL, Représentations of solvable Lie algebras and the Gelfand–Kirillov conjecture, *Proc. London Math. Soc.* (3) **29** (1974), 453–484.
16. M. P. MALLIAVIN, Caractéristiques d'Euler Poincaré d'algèbres de Lie nilpotentes, *Bull. Sci. Math.* **100** (1976), 269–287.
17. M. P. MALLIAVIN, Caténarité et Théorème d'intersection en algèbre noncommutative, "Séminaire Dubreil," Lecture Notes in Math. No. 740, Springer-Verlag, New York, 1978.
18. E. MATLIS, Injective modules over Noetherian rings, *Pacific J. Math.* **8** (1958), 511–528.

19. C. MOEGLIN, Factorialité dans les algèbres enveloppantes, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A* **282** (1976), 1269–1272.
20. J. E. ROOS, Compléments à l'étude des quotients primitifs des algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie semi-simples, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* (1973), 447–450.
21. P. S. SMITH, Localisation and the A.R. property, *Proc. London Math. Soc. (5)* **22** (1971), 39–68.
22. T. STAFFORD, Module Structure of Weyl algebra, *J. London Math. Soc. (2)* **18** (1978), 429–442.
23. P. TAUVEL, Sur les quotients premiers de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble, *Bull. Soc. Math. France* **106** (1978), 177–205.
24. P. TAUVEL, Sur la dimension de Gelfand–Kirillov, *Comm. Algebra* **10**, No. 9 (1982), 939–963.
25. S. YAMMINE, Les théorèmes de Cohen–Seidenberg en algèbre non commutative, "Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil 1977/78, Lecture Notes in Math. No. 740, pp. 120–169, Springer-Verlag, New York.
26. S. YAMMINE, Théorèmes d'incomparabilité et de descente en Algèbre non commutative, "Annales des Sociétés Savantés Savantes. 105è Congrès, Caen, 1980.